

## UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - IV appello - 7 luglio 2010

|                 |           |
|-----------------|-----------|
| COGNOME         | NOME      |
| CORSO DI LAUREA | MATRICOLA |

**ESERCIZIO 1.** Si consideri il sistema  $AX = B$  con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4k \\ 0 & k & -1 \\ 4 & k+2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix},$$

dove  $k$  è un parametro reale. Si determinino, al variare di  $k \in \mathbb{R}$ :

- il rango della matrice dei coefficienti;

**Risposta** Se  $k \neq -\frac{1}{4}, k \neq 1$  si ha  $\rho(A_k) = 3$ , se  $k = -\frac{1}{4}, k = 1$ , allora  $\rho(A_k) = 2$ . \_\_\_\_\_ (pt.2)

- i valori di  $k$  per i quali il sistema è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni;

**Risposta** Compatibile per  $k \neq -\frac{1}{4}$ . Se  $k \neq -\frac{1}{4}, k \neq 1$  soluzione unica; se  $k = 1$   $\infty^1$  soluzioni. \_\_\_\_\_ (pt.3)

- posto  $k = 1$ , l'insieme delle soluzioni del sistema  $AX = B$ .

**Risposta**  $\{(-\frac{5}{4}\alpha - \frac{1}{4}, \alpha + 1, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

**ESERCIZIO 2.** Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$  con il prodotto scalare euclideo si considerino:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = -x + z\}, \quad W_h = \mathcal{L}((h, 0, h), (h + 1, h, 1)),$$

dove  $h$  è un parametro reale. Al variare di  $h \in \mathbb{R}$  si determinino:

- una base e la dimensione di  $U$  e  $W_h$ ;

**Risposta**  $\dim U = 2, \mathcal{B}_U = ((1, -1, 0), (0, 1, 1))$ ,

se  $h = 0, \dim W_h = 1, \mathcal{B}_{W_h} = ((1, 0, 1))$ , se  $h \neq 0, \dim W_h = 2, \mathcal{B}_{W_h} = ((h, 0, h), (h + 1, h, 1))$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

- una base e la dimensione di  $U^\perp$ ;

**Risposta**  $\dim(U^\perp) = 1, \mathcal{B}_{U^\perp} = ((1, 1, -1))$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

- una base e la dimensione di  $U \cap W_h$  e di  $U + W_h$ .

**Risposta** Se  $h \neq 0, \mathcal{B}_{U+W_h} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)), \dim(U + W_h) = 3, \mathcal{B}_{U \cap W_h} = ((1, 0, 1)), \dim(U \cap W_h) = 1$

Se  $h = 0, \mathcal{B}_{U+W_h} = ((1, -1, 0), (0, 1, 1)), \dim(U + W_h) = 2, \mathcal{B}_{U \cap W_h} = ((1, 0, 1)), \dim(U \cap W_h) = 1$ . \_\_\_\_\_ (pt.4)

**ESERCIZIO 3.** In  $E_3(\mathbb{R})$ , sono dati il piano  $\pi: y - z - 2 = 0$  e il punto  $P = (0, 4, -2)$ . Si determinino:

- un'equazione cartesiana della retta passante per il punto  $P$  e ortogonale al piano  $\pi$ ;

**Risposta**  $x = y + z - 2 = 0$  \_\_\_\_\_ (pt.1)

- un'equazione del fascio di piani passanti per il punto  $P$  e ortogonali al piano  $\pi$ ;

**Risposta**  $kx + y + z - 2 = 0, k \in \mathbb{R}$  \_\_\_\_\_ (pt.1)

- la proiezione ortogonale  $H$  del punto  $P$  sul piano  $\pi$  e il simmetrico  $Q$  di  $P$  rispetto al piano  $\pi$  nella direzione ortogonale;

**Risposta**  $H(0, 2, 0), Q(0, 0, 2)$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

- un'equazione della sfera tangente in  $H$  al piano  $\pi$  e passante per  $P$ .

**Risposta**  $x^2 + y^2 + z^2 - 6y + 2z + 8 = 0$  \_\_\_\_\_ (pt.3)

**ESERCIZIO 4.** In  $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$  è data la conica di equazione  $\mathcal{C}_k: kx^2 + 2(k+1)xy + ky^2 + 4x + 1 = 0, k \in \mathbb{R}$ .

- Si stabiliscano i valori di  $k \in \mathbb{R}$  per i quali la conica è riducibile o irriducibile, in tal caso si specifichi per quali valori essa risulta essere una parabola, un'iperbole o un'ellisse.

**Risposta** Conica generale per  $k \neq -\frac{1}{6}$ ; se  $k < -\frac{1}{2}$  ellisse, se  $k = -\frac{1}{2}$  parabola, se  $k > -\frac{1}{2}, k \neq -\frac{1}{6}$  iperbole \_\_\_\_\_ (pt.3)

- Posto  $k = 1$  si determinino, se esistono e sono reali, asintoti, assi e centro di  $\mathcal{C}_1$ .

**Risposta** asintoti:  $x - (\sqrt{3} - 2)y + 2 - \frac{4}{3}\sqrt{3} = 0, x + (\sqrt{3} + 2)y + 2 + \frac{4}{3}\sqrt{3} = 0$ ; assi:  $x - y - 2 = 0, 3x + 3y + 2 = 0$ , centro:  $(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3})$  \_\_\_\_\_ (pt.5)

## UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - IV appello - 7 luglio 2010

|                 |           |
|-----------------|-----------|
| COGNOME         | NOME      |
| CORSO DI LAUREA | MATRICOLA |

**ESERCIZIO 1.** Si consideri il sistema  $AX = B$  con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4k-8 \\ 0 & k-2 & -1 \\ 4 & k & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ k-2 \\ 2k-4 \end{pmatrix},$$

dove  $k$  è un parametro reale. Si determinino, al variare di  $k \in \mathbb{R}$ :

- il rango della matrice dei coefficienti;  
**Risposta** Se  $k \neq \frac{7}{4}, k \neq 3$  si ha  $\rho(A_k) = 3$ , se  $k = \frac{7}{4}, k = 3$ , allora  $\rho(A_k) = 2$ . \_\_\_\_\_ (pt.2)
- i valori di  $k$  per i quali il sistema è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni;  
**Risposta** Compatibile per  $k \neq \frac{7}{4}$ . Se  $k \neq \frac{7}{4}, k \neq 3$  soluzione unica; se  $k = 3$   $\infty^1$  soluzioni. \_\_\_\_\_ (pt.3)
- posto  $k = 3$ , l'insieme delle soluzioni del sistema  $AX = B$ .  
**Risposta**  $\{(-\frac{5}{4}\alpha - \frac{1}{4}, \alpha + 1, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

**ESERCIZIO 2.** Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$  con il prodotto scalare euclideo si considerino:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = -x + z\}, \quad W_h = \mathcal{L}((h-1, 0, h-1), (2h, -3, -h)),$$

dove  $h$  è un parametro reale. Al variare di  $h \in \mathbb{R}$  si determinino:

- una base e la dimensione di  $U$  e  $W_h$ ;  
**Risposta**  $\dim U = 2, \mathcal{B}_U = ((1, -1, 0), (0, 1, 1))$ ,  
se  $h = 1, \dim W_h = 1, \mathcal{B}_{W_h} = ((2, -3, -1))$ , se  $h \neq 1, \dim W_h = 2, \mathcal{B}_{W_h} = ((h-1, 0, h-1), (2h, -3, -h))$  \_\_\_\_\_ (pt.2)
- una base e la dimensione di  $U^\perp$ ;  
**Risposta**  $\dim(U^\perp) = 1, \mathcal{B}_{U^\perp} = ((1, 1, -1))$  \_\_\_\_\_ (pt.2)
- una base e la dimensione di  $U \cap W_h$  e di  $U + W_h$ .  
**Risposta** Se  $h \neq 1, \mathcal{B}_{U+W_h} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)), \dim(U + W_h) = 3, \mathcal{B}_{U \cap W_h} = ((1, 0, 1)), \dim(U \cap W_h) = 1$   
Se  $h = 1, \mathcal{B}_{U+W_h} = ((1, -1, 0), (0, 1, 1)), \dim(U + W_h) = 2, \mathcal{B}_{U \cap W_h} = ((2, -3, -1)), \dim(U \cap W_h) = 1$ . \_\_\_\_\_ (pt.4)

**ESERCIZIO 3.** In  $E_3(\mathbb{R})$ , sono dati il piano  $\pi : y - z - 2 = 0$  e il punto  $P = (0, 2, -1)$ . Si determinino:

- un'equazione cartesiana della retta passante per il punto  $P$  e ortogonale al piano  $\pi$ ;  
**Risposta**  $x = y + z - 1 = 0$  \_\_\_\_\_ (pt.1)
- un'equazione del fascio di piani passanti per il punto  $P$  e ortogonali al piano  $\pi$ ;  
**Risposta**  $kx + y + z - 1 = 0, k \in \mathbb{R}$  \_\_\_\_\_ (pt.1)
- la proiezione ortogonale  $H$  del punto  $P$  sul piano  $\pi$  e il simmetrico  $Q$  di  $P$  rispetto al piano  $\pi$  nella direzione ortogonale;  
**Risposta**  $H(0, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}), Q(0, 1, 0)$  \_\_\_\_\_ (pt.2)
- un'equazione della sfera tangente in  $H$  al piano  $\pi$  e passante per  $P$ .  
**Risposta**  $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{7}{2}y + \frac{3}{2}z + \frac{7}{2} = 0$  \_\_\_\_\_ (pt.3)

**ESERCIZIO 4.** In  $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$  è data la conica di equazione  $C_k : (k-1)x^2 + 2kxy + (k-1)y^2 + 4x + 1 = 0, k \in \mathbb{R}$ .

- Si stabiliscano i valori di  $k \in \mathbb{R}$  per i quali la conica è riducibile o irriducibile, in tal caso si specifichi per quali valori essa risulta essere una parabola, un'iperbole o un'ellisse.  
**Risposta** Conica generale per  $k \neq \frac{5}{6}$ ; se  $k < \frac{1}{2}$  ellisse, se  $k = \frac{1}{2}$  parabola, se  $k > \frac{1}{2}, k \neq \frac{5}{6}$  iperbole \_\_\_\_\_ (pt.3)
- Posto  $k = 5$  si determinino, se esistono e sono reali, asintoti, assi e centro di  $C_5$ .  
**Risposta** asintoti:  $x + 2y + \frac{4}{3} = 0, 2x + y - \frac{2}{3} = 0$ ; assi:  $x - y - 2 = 0, 9x + 9y + 2 = 0$ , centro:  $(\frac{8}{9}, -\frac{10}{9})$  \_\_\_\_\_ (pt.5)

## UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - IV appello - 7 luglio 2010

|                 |           |
|-----------------|-----------|
| COGNOME         | NOME      |
| CORSO DI LAUREA | MATRICOLA |

**ESERCIZIO 1.** Si consideri il sistema  $AX = B$  con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4k-4 \\ 0 & k-1 & -1 \\ 1 & k+1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ k-1 \\ 2k-2 \end{pmatrix},$$

dove  $k$  è un parametro reale. Si determinino, al variare di  $k \in \mathbb{R}$ :

- il rango della matrice dei coefficienti;  
**Risposta** Se  $k \neq \frac{3}{4}, k \neq 2$  si ha  $\rho(A_k) = 3$ , se  $k = \frac{3}{4}, k = 2$ , allora  $\rho(A_k) = 2$ . \_\_\_\_\_ (pt.2)
- i valori di  $k$  per i quali il sistema è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni;  
**Risposta** Compatibile per  $k \neq \frac{3}{4}$ . Se  $k \neq \frac{3}{4}, k \neq 2$  soluzione unica; se  $k = 2$   $\infty^1$  soluzioni. \_\_\_\_\_ (pt.3)
- posto  $k = 2$ , l'insieme delle soluzioni del sistema  $AX = B$ .  
**Risposta**  $\{(-5\alpha - 1, \alpha + 1, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

**ESERCIZIO 2.** Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$  con il prodotto scalare euclideo si considerino:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\}, \quad W_h = \mathcal{L}((h-1, 0, h-1), (2, -2, -2h)),$$

dove  $h$  è un parametro reale. Al variare di  $h \in \mathbb{R}$  si determinino:

- una base e la dimensione di  $U$  e  $W_h$ ;  
**Risposta**  $\dim U = 2, \mathcal{B}_U = ((1, -1, 0), (0, 0, 1))$ ,  
se  $h = 1, \dim W_h = 1, \mathcal{B}_{W_h} = ((2, -2, -2))$ , se  $h \neq 1, \dim W_h = 2, \mathcal{B}_{W_h} = ((h-1, 0, h-1), (2, -2, -2h))$  \_\_\_\_\_ (pt.2)
- una base e la dimensione di  $U^\perp$ ;  
**Risposta**  $\dim(U^\perp) = 1, \mathcal{B}_{U^\perp} = ((1, 1, 0))$  \_\_\_\_\_ (pt.2)
- una base e la dimensione di  $U \cap W_h$  e di  $U + W_h$ .  
**Risposta** Se  $h \neq 1, \mathcal{B}_{U+W_h} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)), \dim(U + W_h) = 3, \mathcal{B}_{U \cap W_h} = ((1, -1, -h)), \dim(U \cap W_h) = 1$   
Se  $h = 1, \mathcal{B}_{U+W_h} = ((0, 0, 1), (1, -1, 0)), \dim(U + W_h) = 2, \mathcal{B}_{U \cap W_h} = ((1, -1, -1)), \dim(U \cap W_h) = 1$ . \_\_\_\_\_ (pt.4)

**ESERCIZIO 3.** In  $E_3(\mathbb{R})$ , sono dati il piano  $\pi : x - z = 0$  e il punto  $P = (0, 4, 2)$ . Si determinino:

- un'equazione cartesiana della retta passante per il punto  $P$  e ortogonale al piano  $\pi$ ;  
**Risposta**  $y - 4 = x + z - 2 = 0$  \_\_\_\_\_ (pt.1)
- un'equazione del fascio di piani passanti per il punto  $P$  e ortogonali al piano  $\pi$ ;  
**Risposta**  $x + ky + z - 2 - 4k = 0, k \in \mathbb{R}$  \_\_\_\_\_ (pt.1)
- la proiezione ortogonale  $H$  del punto  $P$  sul piano  $\pi$  e il simmetrico  $Q$  di  $P$  rispetto al piano  $\pi$  nella direzione ortogonale;  
**Risposta**  $H(1, 4, 1), Q(2, 4, 0)$  \_\_\_\_\_ (pt.2)
- un'equazione della sfera tangente in  $H$  al piano  $\pi$  e passante per  $P$ .  
**Risposta**  $x^2 + y^2 + z^2 - x - 8y - 3z + 18 = 0$  \_\_\_\_\_ (pt.3)

**ESERCIZIO 4.** In  $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$  è data la conica di equazione  $\mathcal{C}_k : (k-1)x^2 + 2kxy + (k-1)y^2 + 2x + 4y = 0, k \in \mathbb{R}$ .

- Si stabiliscano i valori di  $k \in \mathbb{R}$  per i quali la conica è riducibile o irriducibile, in tal caso si specifichi per quali valori essa risulta essere una parabola, un'iperbole o un'ellisse.  
**Risposta** Conica generale per  $k \neq 5$ ; se  $k < \frac{1}{2}$  ellisse, se  $k = \frac{1}{2}$  parabola, se  $k > \frac{1}{2}, k \neq 5$  iperbole \_\_\_\_\_ (pt.3)
- Posto  $k = 3$  si determinino, se esistono e sono reali, asintoti, assi e centro di  $\mathcal{C}_3$ .  
**Risposta** asintoti:  $2x + (3 - \sqrt{5})y + 1 + \frac{\sqrt{5}}{5} = 0, 2x + (3 + \sqrt{5})y + 1 - \frac{\sqrt{5}}{5} = 0$ ; assi:  $x + y + \frac{3}{5} = 0, x - y + 1 = 0$ ,  
centro:  $(-\frac{4}{5}, \frac{1}{5})$  \_\_\_\_\_ (pt.5)

## UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - IV appello - 7 luglio 2010

|                 |           |
|-----------------|-----------|
| COGNOME         | NOME      |
| CORSO DI LAUREA | MATRICOLA |

**ESERCIZIO 1.** Si consideri il sistema  $AX = B$  con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4k+4 \\ 0 & k+1 & -1 \\ 4 & k+3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ k+1 \\ 2k+2 \end{pmatrix},$$

dove  $k$  è un parametro reale. Si determinino, al variare di  $k \in \mathbb{R}$ :

- il rango della matrice dei coefficienti;

**Risposta** Se  $k \neq -\frac{5}{4}, k \neq 0$  si ha  $\rho(A_k) = 3$ , se  $k = -\frac{5}{4}, k = 0$ , allora  $\rho(A_k) = 2$ . \_\_\_\_\_ (pt.2)

- i valori di  $k$  per i quali il sistema è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni;

**Risposta** Compatibile per  $k \neq -\frac{5}{4}$ . Se  $k \neq -\frac{5}{4}, k \neq 0$  soluzione unica; se  $k = 0$   $\infty^1$  soluzioni. \_\_\_\_\_ (pt.3)

- posto  $k = 0$ , l'insieme delle soluzioni del sistema  $AX = B$ .

**Risposta**  $\{(-\frac{5}{4}\alpha - \frac{1}{4}, \alpha + 1, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

**ESERCIZIO 2.** Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$  con il prodotto scalare euclideo si considerino:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y + z\}, \quad W_h = \mathcal{L}((h-1, 0, h-1), (2h, -3, -h)),$$

dove  $h$  è un parametro reale. Al variare di  $h \in \mathbb{R}$  si determinino:

- una base e la dimensione di  $U$  e  $W_h$ ;

**Risposta**  $\dim U = 2, \mathcal{B}_U = ((1, -1, 0), (1, 0, 1))$ ,

se  $h = 1, \dim W_h = 1, \mathcal{B}_{W_h} = ((2, -3, -1))$ , se  $h \neq 1, \dim W_h = 2, \mathcal{B}_{W_h} = ((h-1, 0, h-1), (2h, -3, -h))$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

- una base e la dimensione di  $U^\perp$ ;

**Risposta**  $\dim(U^\perp) = 1, \mathcal{B}_{U^\perp} = ((1, 1, -1))$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

- una base e la dimensione di  $U \cap W_h$  e di  $U + W_h$ .

**Risposta** Se  $h \neq 1, \mathcal{B}_{U+W_h} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)), \dim(U + W_h) = 3, \mathcal{B}_{U \cap W_h} = ((1, 0, 1)), \dim(U \cap W_h) = 1$

Se  $h = 1, \mathcal{B}_{U+W_h} = ((1, -1, 0), (1, 0, 1)), \dim(U + W_h) = 2, \mathcal{B}_{U \cap W_h} = ((2, -3, -1)), \dim(U \cap W_h) = 1$ . \_\_\_\_\_ (pt.4)

**ESERCIZIO 3.** In  $E_3(\mathbb{R})$ , sono dati il piano  $\pi : y - z - 4 = 0$  e il punto  $P = (0, 2, -1)$ . Si determinino:

- un'equazione cartesiana della retta passante per il punto  $P$  e ortogonale al piano  $\pi$ ;

**Risposta**  $x = y + z - 1 = 0$  \_\_\_\_\_ (pt.1)

- un'equazione del fascio di piani passanti per il punto  $P$  e ortogonali al piano  $\pi$ ;

**Risposta**  $kx + y + z - 1 = 0, k \in \mathbb{R}$  \_\_\_\_\_ (pt.1)

- la proiezione ortogonale  $H$  del punto  $P$  sul piano  $\pi$  e il simmetrico  $Q$  di  $P$  rispetto al piano  $\pi$  nella direzione ortogonale;

**Risposta**  $H(0, \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}), Q(0, 3, -2)$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

- un'equazione della sfera tangente in  $H$  al piano  $\pi$  e passante per  $P$ .

**Risposta**  $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{9}{2}y + \frac{5}{2}z + \frac{13}{2} = 0$  \_\_\_\_\_ (pt.3)

**ESERCIZIO 4.** In  $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$  è data la conica di equazione  $C_k : (k-1)x^2 + 2kxy + (k-1)y^2 + 4y + 1 = 0, k \in \mathbb{R}$ .

- Si stabiliscano i valori di  $k \in \mathbb{R}$  per i quali la conica è riducibile o irriducibile, in tal caso si specifichi per quali valori essa risulta essere una parabola, un'iperbole o un'ellisse.

**Risposta** Conica generale per  $k \neq \frac{5}{6}$ ; se  $k < \frac{1}{2}$  ellisse, se  $k = \frac{1}{2}$  parabola, se  $k > \frac{1}{2}, k \neq \frac{5}{6}$  iperbole \_\_\_\_\_ (pt.3)

- Posto  $k = 5$  si determinino, se esistono e sono reali, asintoti, assi e centro di  $C_5$ .

**Risposta** asintoti:  $x + 2y - \frac{2}{3} = 0, 2x + y + \frac{4}{3} = 0$ ; assi:  $x - y + 2 = 0, 9x + 9y + 2 = 0$ , centro:  $(-\frac{10}{9}, \frac{8}{9})$  \_\_\_\_\_ (pt.5)

## UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - IV appello - 7 luglio 2010

|                 |           |
|-----------------|-----------|
| COGNOME         | NOME      |
| CORSO DI LAUREA | MATRICOLA |

**ESERCIZIO 1.** Si consideri il sistema  $AX = B$  con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4k \\ 0 & -k & -1 \\ 4 & 2-k & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ -k \\ -2k \end{pmatrix},$$

dove  $k$  è un parametro reale. Si determinino, al variare di  $k \in \mathbb{R}$ :

- il rango della matrice dei coefficienti;

**Risposta** Se  $k \neq -1, k \neq \frac{1}{4}$  si ha  $\rho(A_k) = 3$ , se  $k = -1, k = \frac{1}{4}$ , allora  $\rho(A_k) = 2$ . \_\_\_\_\_ (pt.2)

- i valori di  $k$  per i quali il sistema è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni;

**Risposta** Compatibile per  $k \neq \frac{1}{4}$ . Se  $k \neq \frac{1}{4}, k \neq -1$  soluzione unica; se  $k = -1$   $\infty^1$  soluzioni. \_\_\_\_\_ (pt.3)

- posto  $k = -1$ , l'insieme delle soluzioni del sistema  $AX = B$ .

**Risposta**  $\{(-\frac{5}{4}\alpha - \frac{1}{4}, \alpha + 1, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

**ESERCIZIO 2.** Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$  con il prodotto scalare euclideo si considerino:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0\}, \quad W_h = \mathcal{L}((h, 0, h), (h + 1, h, 1)),$$

dove  $h$  è un parametro reale. Al variare di  $h \in \mathbb{R}$  si determinino:

- una base e la dimensione di  $U$  e  $W_h$ ;

**Risposta**  $\dim U = 2, \mathcal{B}_U = ((1, 0, 1), (0, 1, 0))$ ,

se  $h = 0, \dim W_h = 1, \mathcal{B}_{W_h} = ((1, 0, 1))$ , se  $h \neq 0, \dim W_h = 2, \mathcal{B}_{W_h} = ((h, 0, h), (h + 1, h, 1))$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

- una base e la dimensione di  $U^\perp$ ;

**Risposta**  $\dim(U^\perp) = 1, \mathcal{B}_{U^\perp} = ((1, 0, -1))$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

- una base e la dimensione di  $U \cap W_h$  e di  $U + W_h$ .

**Risposta** Se  $h \neq 0, \mathcal{B}_{U+W_h} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)), \dim(U + W_h) = 3, \mathcal{B}_{U \cap W_h} = ((1, 0, 1)), \dim(U \cap W_h) = 1$

Se  $h = 0, \mathcal{B}_{U+W_h} = ((1, 0, 1), (0, 1, 0)), \dim(U + W_h) = 2, \mathcal{B}_{U \cap W_h} = ((1, 0, 1)), \dim(U \cap W_h) = 1$ . \_\_\_\_\_ (pt.4)

**ESERCIZIO 3.** In  $E_3(\mathbb{R})$ , sono dati il piano  $\pi: y - z = 0$  e il punto  $P = (2, 0, -2)$ . Si determinino:

- un'equazione cartesiana della retta passante per il punto  $P$  e ortogonale al piano  $\pi$ ;

**Risposta**  $x - 2 = y + z + 2 = 0$  \_\_\_\_\_ (pt.1)

- un'equazione del fascio di piani passanti per il punto  $P$  e ortogonali al piano  $\pi$ ;

**Risposta**  $kx + y + z - 2k + 2 = 0, k \in \mathbb{R}$  \_\_\_\_\_ (pt.1)

- la proiezione ortogonale  $H$  del punto  $P$  sul piano  $\pi$  e il simmetrico  $Q$  di  $P$  rispetto al piano  $\pi$  nella direzione ortogonale;

**Risposta**  $H(2, -1, -1), Q(2, -2, 0)$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

- un'equazione della sfera tangente in  $H$  al piano  $\pi$  e passante per  $P$ .

**Risposta**  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + y + 3z + 6 = 0$  \_\_\_\_\_ (pt.3)

**ESERCIZIO 4.** In  $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$  è data la conica di equazione  $\mathcal{C}_k: kx^2 + 2(k+1)xy + ky^2 + 4x + 2y = 0, k \in \mathbb{R}$ .

- Si stabiliscano i valori di  $k \in \mathbb{R}$  per i quali la conica è riducibile o irriducibile, in tal caso si specifichi per quali valori essa risulta essere una parabola, un'iperbole o un'ellisse.

**Risposta** Conica generale per  $k \neq 4$ ; se  $k < -\frac{1}{2}$  ellisse, se  $k = -\frac{1}{2}$  parabola, se  $k > -\frac{1}{2}, k \neq 4$  iperbole \_\_\_\_\_ (pt.3)

- Posto  $k = 1$  si determinino, se esistono e sono reali, asintoti, assi e centro di  $\mathcal{C}_1$ .

**Risposta** asintoti:  $x + (2 - \sqrt{3})y + 2 - \sqrt{3} = 0, x + (2 + \sqrt{3})y + 2 + \sqrt{3} = 0$ ; assi:  $x + y + 1 = 0, x - y - 1 = 0$ , centro:  $(0, -1)$  \_\_\_\_\_ (pt.5)

## UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - IV appello - 7 luglio 2010

|                 |           |
|-----------------|-----------|
| COGNOME         | NOME      |
| CORSO DI LAUREA | MATRICOLA |

**ESERCIZIO 1.** Si consideri il sistema  $AX = B$  con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 8k \\ 0 & 2k & -1 \\ 1 & 2k+2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \\ 4k \end{pmatrix},$$

dove  $k$  è un parametro reale. Si determinino, al variare di  $k \in \mathbb{R}$ :

- il rango della matrice dei coefficienti;

**Risposta** Se  $k \neq -\frac{1}{8}, k \neq \frac{1}{2}$  si ha  $\rho(A_k) = 3$ , se  $k = -\frac{1}{8}, k = \frac{1}{2}$ , allora  $\rho(A_k) = 2$ . \_\_\_\_\_ (pt.2)

- i valori di  $k$  per i quali il sistema è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni;

**Risposta** Compatibile per  $k \neq -\frac{1}{8}$ . Se  $k \neq -\frac{1}{8}, k \neq \frac{1}{2}$  soluzione unica; se  $k = \frac{1}{2}$   $\infty^1$  soluzioni. \_\_\_\_\_ (pt.3)

- posto  $k = \frac{1}{2}$ , l'insieme delle soluzioni del sistema  $AX = B$ .

**Risposta**  $\{(-5\alpha - 1, \alpha + 1, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

**ESERCIZIO 2.** Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$  con il prodotto scalare euclideo si considerino:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y + z\}, \quad W_h = \mathcal{L}((h, 0, h), (h + 1, h, 1)),$$

dove  $h$  è un parametro reale. Al variare di  $h \in \mathbb{R}$  si determinino:

- una base e la dimensione di  $U$  e  $W_h$ ;

**Risposta**  $\dim U = 2, \mathcal{B}_U = ((1, -1, 0), (1, 0, 1))$ ,

se  $h = 0, \dim W_h = 1, \mathcal{B}_{W_h} = ((1, 0, 1))$ , se  $h \neq 0, \dim W_h = 2, \mathcal{B}_{W_h} = ((h, 0, h), (h + 1, h, 1))$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

- una base e la dimensione di  $U^\perp$ ;

**Risposta**  $\dim(U^\perp) = 1, \mathcal{B}_{U^\perp} = ((1, 1, -1))$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

- una base e la dimensione di  $U \cap W_h$  e di  $U + W_h$ .

**Risposta** Se  $h \neq 0, \mathcal{B}_{U+W_h} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)), \dim(U + W_h) = 3, \mathcal{B}_{U \cap W_h} = ((1, 0, 1)), \dim(U \cap W_h) = 1$

Se  $h = 0, \mathcal{B}_{U+W_h} = ((1, -1, 0), (1, 0, 1)), \dim(U + W_h) = 2, \mathcal{B}_{U \cap W_h} = ((1, 0, 1)), \dim(U \cap W_h) = 1$ . \_\_\_\_\_ (pt.4)

**ESERCIZIO 3.** In  $E_3(\mathbb{R})$ , sono dati il piano  $\pi: y - z + 4 = 0$  e il punto  $P = (0, 4, -2)$ . Si determinino:

- un'equazione cartesiana della retta passante per il punto  $P$  e ortogonale al piano  $\pi$ ;

**Risposta**  $x = y + z - 2 = 0$  \_\_\_\_\_ (pt.1)

- un'equazione del fascio di piani passanti per il punto  $P$  e ortogonali al piano  $\pi$ ;

**Risposta**  $kx + y + z - 2 = 0, k \in \mathbb{R}$  \_\_\_\_\_ (pt.1)

- la proiezione ortogonale  $H$  del punto  $P$  sul piano  $\pi$  e il simmetrico  $Q$  di  $P$  rispetto al piano  $\pi$  nella direzione ortogonale;

**Risposta**  $H(0, -1, 3), Q(0, -6, 8)$  \_\_\_\_\_ (pt.2)

- un'equazione della sfera tangente in  $H$  al piano  $\pi$  e passante per  $P$ .

**Risposta**  $x^2 + y^2 + z^2 - 3y - z - 10 = 0$  \_\_\_\_\_ (pt.3)

**ESERCIZIO 4.** In  $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$  è data la conica di equazione  $\mathcal{C}_k: kx^2 + 2(k+1)xy + ky^2 + 4y + 1 = 0, k \in \mathbb{R}$ .

- Si stabiliscano i valori di  $k \in \mathbb{R}$  per i quali la conica è riducibile o irriducibile, in tal caso si specifichi per quali valori essa risulta essere una parabola, un'iperbole o un'ellisse.

**Risposta** Conica generale per  $k \neq -\frac{1}{6}$ ; se  $k < -\frac{1}{2}$  ellisse, se  $k = -\frac{1}{2}$  parabola, se  $k > -\frac{1}{2}, k \neq -\frac{1}{6}$  iperbole \_\_\_\_\_ (pt.3)

- Posto  $k = 1$  si determinino, se esistono e sono reali, asintoti, assi e centro di  $\mathcal{C}_1$ .

**Risposta** asintoti:  $x + (2 - \sqrt{3})y + \frac{2}{3}\sqrt{3} = 0, x + (2 + \sqrt{3})y - \frac{2}{3}\sqrt{3} = 0$ ; assi:  $3x + 3y + 2 = 0, x - y + 2 = 0$ , centro:  $(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$  \_\_\_\_\_ (pt.5)