UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 19.10.07

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si stabilisca per quali valori del parametro reale k il vettore $v = (k+1, k^2, 1, 0)$ appartiene al sottospazio generato da $\{(1,1,0,0), (0,1,0,1), (0,0,1,1)\}$.
Risposta $k = 0 \bigvee k = 1$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $M_2(\mathbb{R})$ si considerino le matrici $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} k+1 & 0 \\ k & 0 \end{pmatrix}$. Si determinino:

- i valori di k per cui il sottospazio U generato da v_1, v_2 e v_3 ha dimensione 2;
  Risposta $k = 0$ **(pt.2)**
- posto $k = 0$ una base B di un complemento diretto di U.
  Risposta $B = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino l'insieme di vettori $A = \{w_1 = (1,2,3), w_2 = (0,2,0), w_3 = (-2,4,-6)\}$. Si determinino:

- la chiusura $\mathcal{L}(A)$ dell'insieme A;
  Risposta $\mathcal{L}(A) = \{(\alpha, 2\alpha + 2\beta, 3\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**
- una base B per $\mathcal{L}(A)$;
  Risposta $B = ((1,2,3), (0,2,0))$ **(pt.2)**
- il coefficiente di Fourier e la proiezione di w_3 lungo w_1.
  Risposta $-\frac{6}{7}$, $\left(-\frac{6}{7}, -\frac{12}{7}, -\frac{18}{7}\right)$ **(pt.2)**

Si dica se esistono coppie di vettori di A tra loro ortogonali e in tal caso si indichi quali sono.
Risposta nessuna **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} k-1 & 0 & 1 \\ 2 & k+4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ k+2 \end{pmatrix}$, al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice A;
  Risposta $k \neq \pm 4$ $\rho(A) = 3$; $k = \pm 4$ $\rho(A) = 2$ **(pt.3)**
- il rango della matrice $A|B$;
  Risposta $k = -4$ $\rho(A|B) = 2$; $k \neq -4$ $\rho(A|B) = 3$ **(pt.3)**
- i valori di k per i quali il sistema AX=B è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni;
  Risposta $k \neq \pm 4$ $\exists!$ soluzione; $k = -4$ ∞^1 soluzioni **(pt.2)**
- l'insieme S delle soluzioni per $k = -4$;
  Risposta $S = \{(0, t, -2) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**
- Il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ generato dall'insieme S.
  Risposta $\{(0, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

2

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 19.10.07

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si stabilisca per quali valori del parametro reale k il vettore $v = (0, k^2, 1, 2k+1)$ appartiene al sottospazio generato da $\{(0,1,0,1), (1,1,0,0), (1,0,1,0)\}$.
Risposta $k = 0 \bigvee k = 2$ ________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $M_2(\mathbb{R})$ si considerino le matrici $v_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & k-1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} k & 0 \\ k-1 & 0 \end{pmatrix}$. Si determinino:

- i valori di k per cui il sottospazio U generato da v_1, v_2 e v_3 ha dimensione 2;
  Risposta $k = 1$ ________ **(pt.2)**
- posto $k = 1$ una base B di un complemento diretto di U.
  Risposta $B = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ ________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino l'insieme di vettori $A = \{w_1 = (0,1,0), w_2 = (3,0,-2), w_3 = (-3,2,2)\}$. Si determinino:

- la chiusura $\mathcal{L}(A)$ dell'insieme A;
  Risposta $\mathcal{L}(A) = \{(3\alpha, \beta, -2\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.3)**
- una base B per $\mathcal{L}(A)$;
  Risposta $B = ((0,1,0), (3,0,-2))$ ________ **(pt.2)**
- il coefficiente di Fourier e la proiezione di w_3 lungo w_1.
  Risposta 2, $(0,2,0)$ ________ **(pt.2)**

Si dica se esistono coppie di vettori di A tra loro ortogonali e in tal caso si indichi quali sono.
Risposta $w_1 \perp w_2$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & 1 \\ 2 & k+2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$, al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice A;
  Risposta $k \neq \pm 2$ $\rho(A) = 3$; $k = \pm 2$ $\rho(A) = 2$ ________ **(pt.3)**
- il rango della matrice $A|B$;
  Risposta $k = -2$ $\rho(A|B) = 2$; $k \neq -2$ $\rho(A|B) = 3$ ________ **(pt.3)**
- i valori di k per i quali il sistema AX=B è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni;
  Risposta $k \neq \pm 2$ $\exists!$ soluzione; $k = -2$ ∞^1 soluzioni ________ **(pt.2)**
- l'insieme S delle soluzioni per $k = -2$;
  Risposta $S = \{(0, t, -2) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.3)**
- Il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ generato dall'insieme S.
  Risposta $\{(0, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.2)**

3

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 19.10.07

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si stabilisca per quali valori del parametro reale k il vettore $v = (k^2, k+1, 0, -3)$ appartiene al sottospazio generato da $\{(1,0,0,-1), (0,1,1,0), (2,0,1,-2)\}$.
Risposta $k = \pm\sqrt{3}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $M_2(\mathbb{R})$ si considerino le matrici $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k+1 & 0 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} -k & k+1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si determinino:

- i valori di k per cui il sottospazio U generato da v_1, v_2 e v_3 ha dimensione 2;
  Risposta $k = -1$ **(pt.2)**
- posto $k = -1$ una base B di un complemento diretto di U.
  Risposta $B = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino l'insieme di vettori $A = \{w_1 = (-1,2,1), w_2 = (-1,1,0), w_3 = (-1,4,3)\}$. Si determinino:

- la chiusura $\mathcal{L}(A)$ dell'insieme A;
  Risposta $\mathcal{L}(A) = \{(-\alpha-\beta, 2\alpha+\beta, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**
- una base B per $\mathcal{L}(A)$;
  Risposta $B = ((-1,2,1), (-1,1,0))$ **(pt.2)**
- il coefficiente di Fourier e la proiezione di w_2 lungo w_1.
  Risposta $\frac{1}{2}$, $\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$ **(pt.2)**

Si dica se esistono coppie di vettori di A tra loro ortogonali e in tal caso si indichi quali sono.
Risposta nessuna **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 2 & k+3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ k-5 \end{pmatrix}$, al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice A;
  Risposta $k \neq \pm 3$ $\rho(A) = 3$; $k = \pm 3$ $\rho(A) = 2$ **(pt.3)**
- il rango della matrice $A|B$;
  Risposta $k = 3$ $\rho(A|B) = 2$; $k \neq 3$ $\rho(A|B) = 3$ **(pt.3)**
- i valori di k per i quali il sistema AX=B è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni;
  Risposta $k \neq \pm 3$ $\exists!$ soluzione; $k = 3$ ∞^1 soluzioni **(pt.2)**
- l'insieme S delle soluzioni per $k = 3$;
  Risposta $S = \{(3t, -t, -2-9t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**
- Il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ generato dall'insieme S.
  Risposta $\{(3\alpha, -\alpha, -2\beta - 9\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 19.10.07

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si stabilisca per quali valori del parametro reale k il vettore $v = (k^2, k+1, 0, 5)$ appartiene al sottospazio generato da $\{(1,0,0,-1),(0,1,0,3),(2,0,1,-2)\}$.
Risposta $k = 1 \bigvee k = 2$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $M_2(\mathbb{R})$ si considerino le matrici $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ k+1 & 2 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} k & 0 \\ k+1 & 0 \end{pmatrix}$. Si determinino:

- i valori di k per cui il sottospazio U generato da v_1, v_2 e v_3 ha dimensione 2;
  Risposta $k = -1$ **(pt.2)**
- posto $k = -1$ una base B di un complemento diretto di U.
  Risposta $B = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino l'insieme di vettori $A = \{w_1 = (1,0,3), w_2 = (0,3,0), w_3 = (1,-3,3)\}$. Si determinino:

- la chiusura $\mathcal{L}(A)$ dell'insieme A;
  Risposta $\mathcal{L}(A) = \{(\alpha, 3\beta, 3\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**
- una base B per $\mathcal{L}(A)$;
  Risposta $B = ((1,0,3),(0,3,0))$ **(pt.2)**
- il coefficiente di Fourier e la proiezione di w_3 lungo w_2.
  Risposta -1, $(0,-3,0))$ **(pt.2)**

Si dica se esistono coppie di vettori di A tra loro ortogonali e in tal caso si indichi quali sono.
Risposta $w_1 \perp w_2$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 2k & 0 & 2 \\ 4 & k+6 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2k+8 \end{pmatrix}$, al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice A;
  Risposta $k \neq 3 \wedge k \neq -6 : \rho(A) = 3$; $k = 3 \vee k = -6 : \rho(A) = 2$ **(pt.3)**
- il rango della matrice $A|B$;
  Risposta $k = -6\ \rho(A|B) = 2$; $k \neq -6\ \rho(A|B) = 3$ **(pt.3)**
- i valori di k per i quali il sistema AX=B è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni;
  Risposta $k \neq 3 \wedge k \neq -6 : \exists!$ soluzione; $k = -6\ \infty^1$ soluzioni **(pt.2)**
- l'insieme S delle soluzioni per $k = -6$;
  Risposta $S = \{(0, t, -2) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**
- Il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ generato dall'insieme S.
  Risposta $\{(0, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 19.10.07

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si stabilisca per quali valori del parametro reale k il vettore $v = (0, k+1, k^2, -1)$ appartiene al sottospazio generato da $\{(2, 0, -2, 2), (1, -1, 0, 0), (0, 0, 2, -2)\}$.
Risposta $k = \pm 1$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $M_2(\mathbb{R})$ si considerino le matrici $v_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ k & k-2 \end{pmatrix}$. Si determinino:

- i valori di k per cui il sottospazio U generato da v_1, v_2 e v_3 ha dimensione 2;
  Risposta $k = 0$ **(pt.2)**
- posto $k = 0$ una base B di un complemento diretto di U.
  Risposta $B = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino l'insieme di vettori $A = \{w_1 = (3, 1, 2), w_2 = (0, 2, 0), w_3 = (-3, 3, -2)\}$. Si determinino:

- la chiusura $\mathcal{L}(A)$ dell'insieme A;
  Risposta $\mathcal{L}(A) = \{(3\alpha, \alpha + 2\beta, 2\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**
- una base B per $\mathcal{L}(A)$;
  Risposta $B = ((3, 1, 2), (0, 2, 0))$ **(pt.2)**
- il coefficiente di Fourier e la proiezione di w_2 lungo w_1.
  Risposta $\frac{1}{7}$, $(\frac{3}{7}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7})$ **(pt.2)**

Si dica se esistono coppie di vettori di A tra loro ortogonali e in tal caso si indichi quali sono.
Risposta nessuna **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 2k+1 & 0 & 2 \\ 0 & 2k+5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ 2k-9 \end{pmatrix}$, al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice A;
  Risposta $k \neq \pm\frac{5}{2}$ $\rho(A) = 3$; $k = \pm\frac{5}{2}$ $\rho(A) = 2$ **(pt.3)**
- il rango della matrice $A|B$;
  Risposta $k = \frac{5}{2}$ $\rho(A|B) = 2$; $k \neq \frac{5}{2}$ $\rho(A|B) = 3$ **(pt.3)**
- i valori di k per i quali il sistema AX=B è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni;
  Risposta $k \neq \pm\frac{5}{2}$ $\exists!$ soluzione; $k = \frac{5}{2}$ ∞^1 soluzioni **(pt.2)**
- l'insieme S delle soluzioni per $k = \frac{5}{2}$;
  Risposta $S = \{(t, 1, -2 - 3t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**
- Il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ generato dall'insieme S.
  Risposta $\{(\alpha, \beta, -3\alpha - 2\beta) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 19.10.07

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si stabilisca per quali valori del parametro reale k il vettore $v = (k+1, 0, k^2, -2)$ appartiene al sottospazio generato da $\{(1,-1,0,0), (0,-1,1,0), (1,0,-2,2)\}$.
Risposta $k = -1 \bigvee k = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $M_2(\mathbb{R})$ si considerino le matrici $v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2k-2 \\ k-2 & k-1 \end{pmatrix}$. Si determinino:

- i valori di k per cui il sottospazio U generato da v_1, v_2 e v_3 ha dimensione 2;
  Risposta $k = 2$ **(pt.2)**
- posto $k = 2$ una base B di un complemento diretto di U.
  Risposta $B = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino l'insieme di vettori $A = \{w_1 = (0,2,0), w_2 = (1,0,-2), w_3 = (2,-2,-4)\}$. Si determinino:

- la chiusura $\mathcal{L}(A)$ dell'insieme A;
  Risposta $\mathcal{L}(A) = \{(\beta, 2\alpha, -2\beta) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**
- una base B per $\mathcal{L}(A)$;
  Risposta $B = ((0,2,0), (1,0,-2))$ **(pt.2)**
- il coefficiente di Fourier e la proiezione di w_3 lungo w_1.
  Risposta -1, $(0,-2,0)$ **(pt.2)**

Si dica se esistono coppie di vettori di A tra loro ortogonali e in tal caso si indichi quali sono.
Risposta $w_1 \perp w_2$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} k+2 & 0 & 1 \\ 2 & k+1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3k+1 \end{pmatrix}$, al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice A;
  Risposta $k \neq \pm 1$ $\rho(A) = 3$; $k = \pm 1$ $\rho(A) = 2$ **(pt.3)**
- il rango della matrice $A|B$;
  Risposta $k = -1$ $\rho(A|B) = 2$; $k \neq -1$ $\rho(A|B) = 3$ **(pt.3)**
- i valori di k per i quali il sistema AX=B è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni;
  Risposta $k \neq \pm 1$ $\exists!$ soluzione; $k = -1$ ∞^1 soluzioni **(pt.2)**
- l'insieme S delle soluzioni per $k = -1$;
  Risposta $S = \{(0, t, -2) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**
- Il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ generato dall'insieme S.
  Risposta $\{(0, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 19.10.07

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si stabilisca per quali valori del parametro reale k il vettore $v = (-2, 0, -k^2, 2k+3)$ appartiene al sottospazio generato da $\{(1, 2, 0, 0), (0, -1, 1, 0), (1, 0, 2, -2)\}$.
Risposta $k = \pm 2$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $M_2(\mathbb{R})$ si considerino le matrici $v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & k+2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} k-2 & 0 \\ 1 & k+2 \end{pmatrix}$. Si determinino:

- i valori di k per cui il sottospazio U generato da v_1, v_2 e v_3 ha dimensione 2;
  Risposta $k = -2$ **(pt.2)**
- posto $k = -2$ una base B di un complemento diretto di U.
  Risposta $B = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino l'insieme di vettori $A = \{w_1 = (2, 1, 3), w_2 = (1, -1, 0), w_3 = (0, 3, 3)\}$. Si determinino:

- la chiusura $\mathcal{L}(A)$ dell'insieme A;
  Risposta $\mathcal{L}(A) = \{(2\alpha + \beta, \alpha - \beta, 3\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**
- una base B per $\mathcal{L}(A)$;
  Risposta $B = ((2, 1, 3), (1, -1, 0))$ **(pt.2)**
- il coefficiente di Fourier e la proiezione di w_2 lungo w_1.
  Risposta $\frac{1}{14}$, $\left(\frac{1}{7}, \frac{1}{14}, \frac{3}{14}\right)$ **(pt.2)**

Si dica se esistono coppie di vettori di A tra loro ortogonali e in tal caso si indichi quali sono.
Risposta nessuna **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 2k+1 & 0 & 2 \\ 0 & 2k+5 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 2k-3 \end{pmatrix}$, al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice A;
  Risposta $k \neq \pm\frac{5}{2}$ $\rho(A) = 3$; $k = \pm\frac{5}{2}$ $\rho(A) = 2$ **(pt.3)**
- il rango della matrice $A|B$;
  Risposta $k = \frac{5}{2}$ $\rho(A|B) = 2$; $k \neq \frac{5}{2}$ $\rho(A|B) = 3$ **(pt.3)**
- i valori di k per i quali il sistema AX=B è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni;
  Risposta $k \neq \pm\frac{5}{2}$ $\exists!$ soluzione; $k = \frac{5}{2}$ ∞^1 soluzioni **(pt.2)**
- l'insieme S delle soluzioni per $k = \frac{5}{2}$;
  Risposta $S = \{(t, 1, 1-3t) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**
- Il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ generato dall'insieme S.
  Risposta $\{(\alpha, \beta, -3\alpha + \beta) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

8

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 19.10.07

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si stabilisca per quali valori del parametro reale k il vettore $v = (k, 0, k^2, -3)$ appartiene al sottospazio generato da $\{(1, 2, 0, 0), (0, -2, 2, 0), (-2, 0, 1, -1)\}$.

Risposta $k = -3 \bigvee k = 5$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $M_2(\mathbb{R})$ si considerino le matrici $v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 & k+3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} k-1 & 0 \\ k+3 & 0 \end{pmatrix}$. Si determinino:

- i valori di k per cui il sottospazio U generato da v_1, v_2 e v_3 ha dimensione 2;

  Risposta $k = -3$ **(pt.2)**

- posto $k = -3$ una base B di un complemento diretto di U.

  Risposta $B = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino l'insieme di vettori $A = \{w_1 = (3, 2, 1), w_2 = (0, 3, 0), w_3 = (6, -2, 2)\}$. Si determinino:

- la chiusura $\mathcal{L}(A)$ dell'insieme A;

  Risposta $\mathcal{L}(A) = \{(3\alpha, 2\alpha + 3\beta, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

- una base B per $\mathcal{L}(A)$;

  Risposta $B = ((3, 2, 1), (0, 3, 0))$ **(pt.2)**

- il coefficiente di Fourier e la proiezione di w_1 lungo w_2.

  Risposta $\frac{2}{3}$, $(0, 2, 0)$ **(pt.2)**

Si dica se esistono coppie di vettori di A tra loro ortogonali e in tal caso si indichi quali sono.

Risposta nessuna **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 2k & 0 & 1 \\ 1 & 2k-4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2k+1 \end{pmatrix}$, al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice A;

  Risposta $k \neq 2 \wedge k \neq -\frac{1}{2}$ $\rho(A) = 3$; $k = 2 \vee k = -\frac{1}{2}$ $\rho(A) = 2$ **(pt.3)**

- il rango della matrice $A|B$;

  Risposta $k = -\frac{1}{2}$ $\rho(A|B) = 2$; $k \neq -\frac{1}{2}$ $\rho(A|B) = 3$ **(pt.3)**

- i valori di k per i quali il sistema AX=B è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni;

  Risposta $k \neq 2 \wedge k \neq -\frac{1}{2}$ $\exists!$ soluzione; $k = -\frac{1}{2}$ ∞^1 soluzioni **(pt.2)**

- l'insieme S delle soluzioni per $k = -\frac{1}{2}$;

  Risposta $S = \{(1 + 5t, t, 1 + 5t) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

- Il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ generato dall'insieme S.

  Risposta $\{(\alpha + 5\beta, \beta, \alpha + 5\beta) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 19.10.07

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si stabilisca per quali valori del parametro reale k il vettore $v = (2k, 0, k^2, -3)$ appartiene al sottospazio generato da $\{(3,0,0,-3),(1,1,0,-1),(-2,2,1,1)\}$.
Risposta $k = -3 \bigvee k = 1$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $M_2(\mathbb{R})$ si considerino le matrici $v_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 & k-3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} k+2 & 0 \\ k-3 & 0 \end{pmatrix}$. Si determinino:

- i valori di k per cui il sottospazio U generato da v_1, v_2 e v_3 ha dimensione 2;
  Risposta $k = 3$ **(pt.2)**
- posto $k = 3$ una base B di un complemento diretto di U.
  Risposta $B = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino l'insieme di vettori $A = \{w_1 = (-1,6,-3), w_2 = (0,2,0), w_3 = (-2,4,-6)\}$. Si determinino:

- la chiusura $\mathcal{L}(A)$ dell'insieme A;
  Risposta $\mathcal{L}(A) = \{(-\alpha, 6\alpha + 2\beta, -3\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**
- una base B per $\mathcal{L}(A)$;
  Risposta $B = ((-1,6,-3),(0,2,0))$ **(pt.2)**
- il coefficiente di Fourier e la proiezione di w_1 lungo w_2.
  Risposta 3, $(0,6,0)$ **(pt.2)**

Si dica se esistono coppie di vettori di A tra loro ortogonali e in tal caso si indichi quali sono.
Risposta nessuna **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} k-1 & 0 & 2 \\ -1 & k+5 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ k+3 \end{pmatrix}$, al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice A;
  Risposta $k \neq 4 \wedge k \neq -5$ $\rho(A) = 3$; $k = 4 \vee k = -5$ $\rho(A) = 2$ **(pt.3)**
- il rango della matrice $A|B$;
  Risposta $k = -5$ $\rho(A|B) = 2$; $k \neq -5$ $\rho(A|B) = 3$ **(pt.3)**
- i valori di k per i quali il sistema AX=B è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni;
  Risposta $k \neq 4 \wedge k \neq -5$ $\exists!$ soluzione; $k = -5$ ∞^1 soluzioni **(pt.2)**
- l'insieme S delle soluzioni per $k = -5$;
  Risposta $S = \{(0,t,-1) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**
- Il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ generato dall'insieme S.
  Risposta $\{(0,\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**