

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II prova intermedia - 23.12.11

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $r : \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}$ e $s_k : \begin{cases} x + (k-1)y + z = -1 \\ kz = 0 \end{cases}$. Se ne determini, se esistono, la mutua posizione al variare del parametro reale k .

Risposta $k \neq 0, 3$ sghembe, $k = 0$ s_0 non esiste, $k = 3$ incidenti in $P = (1, -1, 0)$ _____ (pt.3)
Posto $k = 1$, si determinino:

- una rappresentazione cartesiana della retta t , se esiste, incidente r ed s_1 e ortogonale ad entrambe;

Risposta $\begin{cases} y = 0 \\ x - z = -1 \end{cases}$ _____ (pt.3)

- un'equazione cartesiana della superficie S generata dalla rotazione di s_1 attorno ad r .

Risposta $xy + xz - yz - x + y - 1 = 0$ _____ (pt.5)

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri il fascio di coniche $\mathcal{F} : x^2 + ky^2 + 4kxy + 4x + 2ky = 0$. Al variare del parametro reale k si determinino:

- le coniche degeneri di \mathcal{F} ;

Risposta $\mathcal{C}_1 : x^2 + 4x = 0$; $\mathcal{C}_2 : 7x^2 + 4y^2 + 16xy + 28x + 8y = 0$; $\mathcal{C}_3 : y^2 + 4xy + 2y = 0$ _____ (pt.3)

- i valori di k , se esistono, per i quali si ottengono iperboli e, in particolare, iperboli equilateri.

Risposta Per $k < 0 \vee 4/7 \neq k > 1/4$ si hanno iperboli, per $k = -1$ l'iperbole è equilatera. _____ (pt.2)

Si consideri la conica \mathcal{C} di \mathcal{F} ottenuta per $k = 1$.

- Si determini il punto Q della retta $r : x - y = 0$ coniugato di $P = (1, 0)$ rispetto a \mathcal{C} .

Risposta $Q = (-1/3, -1/3)$ _____ (pt.2)

- Si riconosca e si studi la conica \mathcal{C} , determinandone, se esistono e sono reali, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi.

Risposta Si tratta di un'iperbole con asintoti $t_{1,2} : x + (2 \pm \sqrt{3})y = \mp\sqrt{3} - 2$; centro $C = (0, -1)$; assi $a_{1,2} : x \pm y = \mp 1$ _____ (pt.5)

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono dati la quadrica $\mathcal{Q} : xy - xz + 2yz - x + y - 1 = 0$ ed i piani $\alpha : y = 1$ e $\beta : y - z = 0$. Si riconoscano \mathcal{Q} , $\mathcal{C}_1 = \alpha \cap \mathcal{Q}$ e $\mathcal{C}_2 = \beta \cap \mathcal{Q}$.

Risposta \mathcal{Q} è un iperboloide iperbolico; $\mathcal{C}_1 = r_1 \cup r_2$ rette reali e distinte; \mathcal{C}_2 è una parabola. _____ (pt.4)

In particolare, si scrivano rappresentazioni cartesiane di \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 fornendo la rappresentazione delle rette componenti nel caso la sezione sia riducibile.

Risposta $\mathcal{C}_1 : \begin{cases} xz - 2z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ con $r_1 : \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ e $r_2 : \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$; $\mathcal{C}_2 : \begin{cases} 2y^2 - x + y - 1 = 0 \\ y = z \end{cases}$ _____ (pt.3)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II prova intermedia - 23.12.11

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $r : \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 2 \end{cases}$ e $s_k : \begin{cases} x + (k-2)y + z = -1 \\ (k-1)z = 0 \end{cases}$. Se ne determini, se esistono, la mutua posizione al variare del parametro reale k .

Risposta $k \neq 1, 7/2$ sghembe, $k = 1$ s_1 non esiste, $k = 7/2$ incidenti in $(2, -2, 0)$ _____ (pt.3)
Posto $k = 2$, si determinino:

- una rappresentazione cartesiana della retta t , se esiste, incidente r ed s_2 e ortogonale ad entrambe;

Risposta $\begin{cases} 2y = -1 \\ x - z = -1 \end{cases}$ _____ (pt.3)

- un'equazione cartesiana della superficie S generata dalla rotazione di s_2 attorno ad r .

Risposta $xy + xz - yz - x + y - z - 1 = 0$ _____ (pt.5)

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri il fascio di coniche $\mathcal{F} : 2kx^2 + y^2 + 4kxy + 2kx + 2y = 0$. Al variare del parametro reale k si determinino:

- le coniche degeneri di \mathcal{F} ;

Risposta $\mathcal{C}_1 : x^2 + 2xy + x = 0$; $\mathcal{C}_2 : 4x^2 + 3y^2 + 8xy + 4x + 6y = 0$; $\mathcal{C}_3 : y^2 + 2y = 0$ _____ (pt.3)

- i valori di k , se esistono, per i quali si ottengono iperboli e, in particolare, iperboli equilateri.

Risposta Per $k < 0 \vee 2/3 \neq k > 1/2$ si hanno iperboli, per $k = -1/2$ l'iperbole è equilatera. _ (pt.2)

Si consideri la conica \mathcal{C} di \mathcal{F} ottenuta per $k = -1$.

- Si determini il punto Q della retta $r : x - y = 0$ coniugato di $P = (1, 0)$ rispetto a \mathcal{C} .

Risposta $Q = (-1/4, -1/4)$ _____ (pt.2)

- Si riconosca e si studi la conica \mathcal{C} , determinandone, se esistono e sono reali, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi.

Risposta Si tratta di un'iperbole con asintoti $t_{1,2} : 2x + (2 \pm \sqrt{6})y = -1 \mp \frac{2}{3}\sqrt{6}$; centro $C = (1/6, -2/3)$; assi $a_1 : 6x + 3y = -1$, $a_2 : 2x - 4y = 3$ _____ (pt.5)

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono dati la quadrica $\mathcal{Q} : xy - xz + 2yz + y + 2z = 0$ ed i piani $\alpha : y = z$ e $\beta : y = 1$. Si riconoscano \mathcal{Q} , $\mathcal{C}_1 = \alpha \cap \mathcal{Q}$ e $\mathcal{C}_2 = \beta \cap \mathcal{Q}$.

Risposta \mathcal{Q} è un iperboloido iperbolico; $\mathcal{C}_1 = r_1 \cup r_2$ rette reali e distinte; \mathcal{C}_2 è una iperbole. _____ (pt.4)

In particolare, si scrivano rappresentazioni cartesiane di \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 fornendo la rappresentazione delle rette componenti nel caso la sezione sia riducibile.

Risposta $\mathcal{C}_1 : \begin{cases} 2y^2 + 3y = 0 \\ y = z \end{cases}$ con $r_1 : \begin{cases} y = 0 \\ y = z \end{cases}$ e $r_2 : \begin{cases} y = -3/2 \\ y = z \end{cases}$; $\mathcal{C}_2 : \begin{cases} xz - x - 4z - 1 = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ (pt.3)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II prova intermedia - 23.12.11

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $r : \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = -1 \end{cases}$ e $s_k : \begin{cases} x + ky + z = -1 \\ (k + 1)z = 0 \end{cases}$. Se ne determini, se esistono, la mutua posizione al variare del parametro reale k .

Risposta $k \neq -1, 0$ sghembe, $k = -1$ s_{-1} non esiste, $k = 0$ incidenti in $P = (-1, 1, 0)$. (pt.3)
Posto $k = 1$, si determinino:

- una rappresentazione cartesiana della retta t , se esiste, incidente r ed s_1 e ortogonale ad entrambe;

Risposta $\begin{cases} z = 0 \\ x - y = -2 \end{cases}$ _____ (pt.3)

- un'equazione cartesiana della superficie S generata dalla rotazione di s_1 attorno ad r .

Risposta $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz - 2yz + 4z - 1 = 0$ _____ (pt.5)

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri il fascio di coniche $\mathcal{F} : x^2 + ky^2 + 2kxy + 4x + ky = 0$. Al variare del parametro reale k si determinino:

- le coniche degeneri di \mathcal{F} ;

Risposta $\mathcal{C}_1 : x^2 + 4x = 0$; $\mathcal{C}_2 : 7x^2 + 16y^2 + 32xy + 28x + 16y = 0$; $\mathcal{C}_3 : y^2 + 2xy + y = 0$ _____ (pt.3)

- i valori di k , se esistono, per i quali si ottengono iperboli e, in particolare, iperboli equilateri.

Risposta Per $k < 0 \vee 16/7 \neq k > 1$ si hanno iperboli, per $k = -1$ l'iperbole è equilatera. _____ (pt.2)

Si consideri la conica \mathcal{C} di \mathcal{F} ottenuta per $k = -2$.

- Si determini il punto Q della retta $r : x - y = 0$ coniugato di $P = (1, 1)$ rispetto a \mathcal{C} .

Risposta $Q = (1/4, 1/4)$ _____ (pt.2)

- Si riconosca e si studi la conica \mathcal{C} , determinandone, se esistono e sono reali, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi.

Risposta Si tratta di un'iperbole con asintoti $t_{1,2} : x - (2 \pm \sqrt{6})y = -2 \mp \frac{1}{2}\sqrt{6}$; centro $C = (-1, 1/2)$; assi $a_1 : 4x - 2y = -5$, $a_2 : x + 2y = 0$ _____ (pt.5)

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono dati la quadrica $\mathcal{Q} : xy - xz + 2yz - z - 1 = 0$ ed i piani $\alpha : z = 1$ e $\beta : x = 2y$. Si riconoscano \mathcal{Q} , $\mathcal{C}_1 = \alpha \cap \mathcal{Q}$ e $\mathcal{C}_2 = \beta \cap \mathcal{Q}$.

Risposta \mathcal{Q} è un'iperboloide iperbolico; $\mathcal{C}_1 = r_1 \cup r_2$ rette reali e distinte; \mathcal{C}_2 è una parabola. _____ (pt.4)

In particolare, si scrivano rappresentazioni cartesiane di \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 fornendo la rappresentazione delle rette componenti nel caso la sezione sia riducibile.

Risposta $\mathcal{C}_1 : \begin{cases} xy - x + 2y - 2 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ con $r_1 : \begin{cases} x = -2 \\ z = 1 \end{cases}$ $r_2 : \begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$; $\mathcal{C}_2 : \begin{cases} 2y^2 - z - 1 = 0 \\ x = 2y \end{cases}$ - (pt.3)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II prova intermedia - 23.12.11

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $r : \begin{cases} y + z = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}$ e $s_k : \begin{cases} x + (k-1)y + z = -1 \\ kx = 0 \end{cases}$. Se ne determini, se esistono, la mutua posizione al variare del parametro reale k .

Risposta $k \neq 0, 3$ sghembe, $k = 0$ s_0 non esiste, $k = 3$ incidenti in $P = (0, -1, 1)$ _____ (pt.3)
Posto $k = 1$, si determinino:

- una rappresentazione cartesiana della retta t , se esiste, incidente r ed s_1 e ortogonale ad entrambe;

Risposta $\begin{cases} y = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}$ _____ (pt.3)

- un'equazione cartesiana della superficie S generata dalla rotazione di s_1 attorno ad r .

Risposta $xy - xz - yz - y + z + 1 = 0$ _____ (pt.5)

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri il fascio di coniche $\mathcal{F} : 2kx^2 + y^2 + 4kxy + 2kx + 4y = 0$. Al variare del parametro reale k si determinino:

- le coniche degeneri di \mathcal{F} ;

Risposta $\mathcal{C}_1 : y^2 + 4y = 0$; $\mathcal{C}_2 : 16x^2 + 7y^2 + 32xy + 16x + 28y = 0$; $\mathcal{C}_3 : x^2 + 2xy + x = 0$ _____ (pt.3)

- i valori di k , se esistono, per i quali si ottengono iperboli e, in particolare, iperboli equilateri.

Risposta Per $k < 0 \vee 8/7 \neq k > 1/2$ si hanno iperboli, per $k = -1/2$ l'iperbole è equilatera. _____ (pt.2)

Si consideri la conica \mathcal{C} di \mathcal{F} ottenuta per $k = -1$.

- Si determini il punto Q della retta $r : x - y = 0$ coniugato di $P = (1, 0)$ rispetto a \mathcal{C} .

Risposta $Q = (-1/3, -1/3)$ _____ (pt.2)

- Si riconosca e si studi la conica \mathcal{C} , determinandone, se esistono e sono reali, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi.

Risposta Si tratta di un'iperbole con asintoti $t_{1,2} : 2x + (2 \pm \sqrt{6})y = -1 \mp \sqrt{6}$; centro $C = (1/2, -1)$; assi $a_1 : 2x + y = 0$ $a_2 : 2x - 4y = 5$ _____ (pt.5)

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono dati la quadrica $\mathcal{Q} : xy - xz + 2yz - x + y - 1 = 0$ ed i piani $\alpha : y = z + 1$ e $\beta : y = 2$. Si riconoscano \mathcal{Q} , $\mathcal{C}_1 = \alpha \cap \mathcal{Q}$ e $\mathcal{C}_2 = \beta \cap \mathcal{Q}$.

Risposta \mathcal{Q} è un'iperboloide iperbolico; $\mathcal{C}_1 = r_1 \cup r_2$ rette reali e distinte; \mathcal{C}_2 è una iperbole. _____ (pt.4)

In particolare, si scrivano rappresentazioni cartesiane di \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 fornendo la rappresentazione delle rette componenti nel caso la sezione sia riducibile.

Risposta $\mathcal{C}_1 : \begin{cases} 2z^2 + 3z = 0 \\ y = z + 1 \end{cases}$ con $r_1 : \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ $r_2 : \begin{cases} y = z + 1 \\ 2z + 3 = 0 \end{cases}$; $\mathcal{C}_2 : \begin{cases} xz - x - 4z - 1 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ _____ (pt.3)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II prova intermedia - 23.12.11

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $r : \begin{cases} y + z = 0 \\ x + z = -1 \end{cases}$ e $s_k : \begin{cases} x + ky + z = -1 \\ (k+1)x = 0 \end{cases}$. Se ne determini, se esistono, la mutua posizione al variare del parametro reale k .

Risposta $k \neq 0, -1$ sghembe, $k = -1$ s_{-1} non esiste, $k = 0$ incidenti in $P = (0, 1, -1)$. (pt.3)
Posto $k = 1$, si determinino:

- una rappresentazione cartesiana della retta t , se esiste, incidente r ed s_1 e ortogonale ad entrambe;

Risposta $\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$ _____ (pt.3)

- un'equazione cartesiana della superficie S generata dalla rotazione di s_1 attorno ad r .

Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 2yz + 4x - 1 = 0$ _____ (pt.5)

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri il fascio di coniche $\mathcal{F} : kx^2 + y^2 + 2kxy + kx + 4y = 0$. Al variare del parametro reale k si determinino:

- le coniche degeneri di \mathcal{F} ;

Risposta $\mathcal{C}_1 : y^2 + 4y = 0$; $\mathcal{C}_2 : 16x^2 + 7y^2 + 32xy + 16x + 28y = 0$; $\mathcal{C}_3 : x^2 + 2xy + x = 0$ _____ (pt.3)

- i valori di k , se esistono, per i quali si ottengono iperboli e, in particolare, iperboli equilateri.

Risposta Per $k < 0 \vee 16/7 \neq k > 1$ si hanno iperboli, per $k = -1$ l'iperbole è equilatera. _____ (pt.2)

Si consideri la conica \mathcal{C} di \mathcal{F} ottenuta per $k = -2$.

- Si determini il punto Q della retta $r : x - y = 0$ coniugato di $P = (1, 1)$ rispetto a \mathcal{C} .

Risposta $Q = (1/4, 1/4)$ _____ (pt.2)

- Si riconosca e si studi la conica \mathcal{C} , determinandone, se esistono e sono reali, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi.

Risposta Si tratta di un'iperbole con asintoti $t_{1,2} : 2x + (2 \mp \sqrt{6})y = -1 \pm \sqrt{6}$; centro $C = (1/2, -1)$; assi $a_1 : 2x + y = 0$, $a_2 : 2x - 4y = 5$ _____ (pt.5)

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono dati la quadrica $\mathcal{Q} : xy - xz + 2yz - y - 1 = 0$ ed i piani $\alpha : y = z$ e $\beta : y - 2 = 0$. Si riconoscano \mathcal{Q} , $\mathcal{C}_1 = \alpha \cap \mathcal{Q}$ e $\mathcal{C}_2 = \beta \cap \mathcal{Q}$.

Risposta \mathcal{Q} è un'iperboloide iperbolico; $\mathcal{C}_1 = r_1 \cup r_2$ rette reali e distinte; \mathcal{C}_2 è una iperbole. _____ (pt.4)

In particolare, si scrivano rappresentazioni cartesiane di \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 fornendo la rappresentazione delle rette componenti nel caso la sezione sia riducibile.

Risposta $\mathcal{C}_1 : \begin{cases} 2z^2 - z - 1 = 0 \\ y = z \end{cases}$ con $r_1 : \begin{cases} z = 1 \\ y = z \end{cases}$ $r_2 : \begin{cases} z = -1/2 \\ y = z \end{cases}$; $\mathcal{C}_2 : \begin{cases} xz - 2x - 4z + 3 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ (pt.3)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II prova intermedia - 23.12.11

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $r : \begin{cases} y + z = 0 \\ x + z = 2 \end{cases}$ e $s_k : \begin{cases} x + (k-2)y + z = -1 \\ (k-1)z = 0 \end{cases}$. Se ne determini, se esistono, la mutua posizione al variare del parametro reale k .

Risposta $k \neq 1$ sghembe, $k = 1$ s_1 non esiste _____ (pt.3)

Posto $k = 2$, si determinino:

- una rappresentazione cartesiana della retta t , se esiste, incidente r ed s_2 e ortogonale ad entrambe;

Risposta $\begin{cases} y = -3/2 \\ x - z = -1 \end{cases}$ _____ (pt.3)

- un'equazione cartesiana della superficie S generata dalla rotazione di s_2 attorno ad r .

Risposta $xy - xz - yz + 3x + y - z + 3 = 0$ _____ (pt.5)

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri il fascio di coniche $\mathcal{F} : x^2 + ky^2 + 4kxy + 2x + 2ky = 0$. Al variare del parametro reale k si determinino:

- le coniche degeneri di \mathcal{F} ;

Risposta $\mathcal{C}_1 : x^2 + 2x = 0$; $\mathcal{C}_2 : 3x^2 + y^2 + 4xy + 6x + 2y = 0$; $\mathcal{C}_3 : y^2 + 4xy + 2y = 0$ _____ (pt.3)

- i valori di k , se esistono, per i quali si ottengono iperboli e, in particolare, iperboli equilateri.

Risposta Per $k < 0 \vee 1/3 \neq k > 1/4$ si hanno iperboli, per $k = -1$ l'iperbole è equilatera. ____ (pt.2)

Si consideri la conica \mathcal{C} di \mathcal{F} ottenuta per $k = 1$.

- Si determini il punto Q della retta $r : x - y = 0$ coniugato di $P = (1, 0)$ rispetto a \mathcal{C} .

Risposta $Q = (-1/5, -1/5)$ _____ (pt.2)

- Si riconosca e si studi la conica \mathcal{C} , determinandone, se esistono e sono reali, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi.

Risposta Si tratta di un'iperbole con asintoti $t_{1,2} : 3x + 3(2 \pm \sqrt{3})y = -3 \mp \sqrt{3}$;
centro $C = (-1/3, -1/3)$; assi $a_1 : x = y$, $a_2 : 3x + 3y + 2 = 0$ _____ (pt.5)

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono dati la quadrica $\mathcal{Q} : xy - xz + 2yz - 2x + y - 2z - 2 = 0$ ed i piani $\alpha : y = 2$ e $\beta : y - z - 1 = 0$. Si riconoscano \mathcal{Q} , $\mathcal{C}_1 = \alpha \cap \mathcal{Q}$ e $\mathcal{C}_2 = \beta \cap \mathcal{Q}$.

Risposta \mathcal{Q} è un iperboloide iperbolico; $\mathcal{C}_1 = r_1 \cup r_2$ rette reali e distinte; \mathcal{C}_2 è una parabola. _____ (pt.4)

In particolare, si scrivano rappresentazioni cartesiane di \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 fornendo la rappresentazione delle rette componenti nel caso la sezione sia riducibile.

Risposta $\mathcal{C}_1 : \begin{cases} xz - 2z = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ con $r_1 : \begin{cases} y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$ e $r_2 : \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases}$; $\mathcal{C}_2 : \begin{cases} 2y^2 - 3y - x = 0 \\ y - 1 = z \end{cases}$ _____ (pt.3)