

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2° appello - 8.01.07

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

1. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, con il prodotto scalare euclideo, è dato $A = [(1, 1, 2), (0, 1, -1)]$. Si determinino:

(a) $\mathcal{L}(A)$ e il suo complemento ortogonale;

risposta: $\mathcal{L}(A) = \{a, a + b, 2a - b\} \in \mathbb{R}^3, a, b \in \mathbb{R}$ $A^\perp = \mathcal{L}((-3, 1, 1))$ _____ (pt.3)

(b) una base ortogonale di $\mathcal{L}(A)$.

risposta: $((1, 1, 2), (1, 7, -4))$ _____ (pt.3)

2. Si dica quante sono le soluzioni del sistema $\begin{cases} (k+1)x + z = 0 \\ 2x + (k+1)y + 2z = 2k \\ x + y + (k+1)z = k \end{cases}$ al variare di k in \mathbb{R} .

risposta: $k \neq 0, -3 \exists!$ sol. , $k = 0 \infty^1$ sol. , $k = -3$ nessuna sol. _____ (pt.4)

3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, è data la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Si determinino:

(a) gli autovalori della matrice A con le relative molteplicità algebriche;

risposta: $t = 3 \text{ ma} = 2, t = -1 \text{ ma} = 1$ _____ (pt.2)

(b) l'autospazio S relativo all'autovalore positivo e la relativa dimensione.

risposta: $S = \{(0, 2a, a) \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}\}$ $\dim S = 1$ _____ (pt.3)

4. In $E_3(\mathbb{R})$, si determinino:

(a) una rappresentazione cartesiana del piano α contenente $r : x + y - 1 = z - 2 = 0$ e ortogonale a $\beta : x + y + z = 0$;

risposta: $\alpha : x + y - 2z + 3 = 0$ _____ (pt.3)

(b) una rappresentazione cartesiana della retta s incidente $t_1 : \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$ e $t_2 : \begin{cases} y - 2x = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}$ e parallela alla retta $h : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$; **risposta:** $s : \begin{cases} x - y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$ _____ (pt.3)

(c) una rappresentazione cartesiana della circonferenza \mathcal{C} descritta dal punto $P = (1, 1, 1)$ nella rotazione di asse $a : \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - z = 3 \end{cases}$;

risposta: $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ (x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 10 \end{cases}$ _____ (pt.4)

(d) il centro C' e il raggio r della circonferenza \mathcal{C} ;

risposta: $C' = (7/6, -1/3, -11/6)$ $r = \sqrt{59/6}$ _____ (pt.3)

(e) una rappresentazione cartesiana della tangente alla circonferenza \mathcal{C} nel punto P .

risposta: $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 5y - z + 4 = 0 \end{cases}$ _____ (pt.2)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2° appello - 8.01.07

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

1. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, con il prodotto scalare euclideo, è dato $A = [(1, 2, 1), (0, 1, -1)]$. Si determinino:

(a) $\mathcal{L}(A)$ e il suo complemento ortogonale;

risposta: $\mathcal{L}(A) = \{a, 2a + b, a - b\} \in \mathbb{R}^3, a, b \in \mathbb{R}$ $A^\perp = \mathcal{L}((-3, 1, 1))$ _____ (pt.3)

(b) una base ortogonale di $\mathcal{L}(A)$.

risposta: $((1, 2, 1), (1, -4, 7))$ _____ (pt.3)

2. Si dica quante sono le soluzioni del sistema $\begin{cases} x + (3k + 1)y = k \\ 2x + 2y + (3k + 1)z = 0 \\ (3k + 1)x + y + z = k \end{cases}$ al variare di k in \mathbb{R} .

risposta: $k \neq 0, -1 \exists!$ sol. , $k = 0 \infty^1$ sol. , $k = -1$ nessuna sol. _____ (pt.4)

3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, è data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Si determinino:

(a) gli autovalori della matrice A con le relative molteplicità algebriche;

risposta: $t = 3 \quad ma = 1, t = -1 \quad ma = 2$ _____ (pt.2)

(b) l'autospazio S relativo all'autovalore positivo e la relativa dimensione.

risposta: $S = \{(2a, a, 0) \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}\} \quad \dim S = 1$ _____ (pt.3)

4. In $E_3(\mathbb{R})$, si determinino:

(a) una rappresentazione cartesiana del piano α contenente $r : x - 1 = x - y + z = 0$ e ortogonale a $\beta : x - y + z = 0$;

risposta: $\alpha : 2x + y - z - 3 = 0$ _____ (pt.3)

(b) una rappresentazione cartesiana della retta s incidente $t_1 : \begin{cases} x = -y \\ y = z \end{cases}$ e $t_2 : \begin{cases} y + 2z = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$

e parallela alla retta $h : \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + t, t \in \mathbb{R}; \\ z = t \end{cases}$ **risposta:** $s : \begin{cases} y - z = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$ _____ (pt.3)

(c) una rappresentazione cartesiana della circonferenza \mathcal{C} descritta dal punto $P = (-1, 1, 1)$ nella rotazione di asse $a : \begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - z = 2 \end{cases}$;

risposta: $\begin{cases} 2x - y + 2z + 1 = 0 \\ (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 10 \end{cases}$ _____ (pt.4)

(d) il centro C' e il raggio r della circonferenza \mathcal{C} ;

risposta: $C' = (10/9, 13/9, -8/9) \quad r = \sqrt{74}/3$ _____ (pt.3)

(e) una rappresentazione cartesiana della tangente alla circonferenza \mathcal{C} nel punto P .

risposta: $\begin{cases} 2x - y + 2z + 1 = 0 \\ 3x - z + 4 = 0 \end{cases}$ _____ (pt.2)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2° appello - 8.01.07

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

1. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, con il prodotto scalare euclideo, è dato $A = [(1, 1, 1), (1, -2, 0)]$. Si determinino:

(a) $\mathcal{L}(A)$ e il suo complemento ortogonale;

risposta: $\mathcal{L}(A) = \{a + b, a - 2b, a\} \in \mathbb{R}^3, a, b \in \mathbb{R}$ $A^\perp = \mathcal{L}((2, 1, -3))$ _____ (pt.3)

(b) una base ortogonale di $\mathcal{L}(A)$.

risposta: $((1, 1, 1), (4, -5, 1))$ _____ (pt.3)

2. Si dica quante sono le soluzioni del sistema $\begin{cases} y + (2k + 1)z = 2k \\ (2k + 1)x + 2y + 2z = 0 \\ x + (2k + 1)y + z = k \end{cases}$ al variare di k in \mathbb{R} .

risposta: $k \neq 0, -3/2 \exists!$ sol. , $k = 0 \infty^1$ sol. , $k = -3/2$ nessuna sol. _____ (pt.4)

3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, è data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Si determinino:

(a) gli autovalori della matrice A con le relative molteplicità algebriche;

risposta: $t = 0 \quad ma = 1, t = 2 \quad ma = 2$ _____ (pt.2)

(b) l'autospazio S relativo all'autovalore positivo e la relativa dimensione.

risposta: $S = \{(a, 0, a) \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}\} \quad \dim S = 1$ _____ (pt.3)

4. In $E_3(\mathbb{R})$, si determinino:

(a) una rappresentazione cartesiana del piano α contenente $r : y + 1 = x + z - 3 = 0$ e ortogonale a $\beta : x + y - z = 0$;

risposta: $\alpha : x + z - 3 = 0$ _____ (pt.3)

(b) una rappresentazione cartesiana della retta s incidente $t_1 : \begin{cases} x = y \\ y = -z \end{cases}$ e $t_2 : \begin{cases} y - 2x = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$ e

parallela alla retta $h : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$; **risposta:** $s : \begin{cases} x + z = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$ _____ (pt.3)

(c) una rappresentazione cartesiana della circonferenza \mathcal{C} descritta dal punto $P = (1, -1, 1)$ nella rotazione di asse $a : \begin{cases} x + y = 3 \\ y - 2z = 1 \end{cases}$;

risposta: $\begin{cases} 2x - 2y - z - 3 = 0 \\ (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 6 \end{cases}$ _____ (pt.4)

(d) il centro C' e il raggio r della circonferenza \mathcal{C} ;

risposta: $C' = (20/9, 7/9, -1/9) \quad r = \sqrt{53}/3$ _____ (pt.3)

(e) una rappresentazione cartesiana della tangente alla circonferenza \mathcal{C} nel punto P .

risposta: $\begin{cases} 2x - 2y - z - 3 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$ _____ (pt.2)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2° appello - 8.01.07

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

1. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, con il prodotto scalare euclideo, è dato $A = [(2, 1, 1), (0, 1, 1)]$. Si determinino:

(a) $\mathcal{L}(A)$ e il suo complemento ortogonale;

risposta: $\mathcal{L}(A) = \{2a, a + b, a + b\} \in \mathbb{R}^3, a, b \in \mathbb{R}$ $A^\perp = \mathcal{L}((0, 1, -1))$ _____ (pt.3)

(b) una base ortogonale di $\mathcal{L}(A)$.

risposta: $((2, 1, 1), (1, -1, -1))$ _____ (pt.3)

2. Si dica quante sono le soluzioni del sistema $\begin{cases} (3k+1)x + z = 0 \\ 2x + (3k+1)y + 2z = 2k \\ x + y + (3k+1)z = 3k \end{cases}$ al variare di k in \mathbb{R} .

risposta: $k \neq 0, -1 \exists!$ sol. , $k = 0 \infty^1$ sol. , $k = -1$ nessuna sol. _____ (pt.4)

3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, è data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Si determinino:

(a) gli autovalori della matrice A con le relative molteplicità algebriche;

risposta: $t = -1 \text{ ma} = 1, t = 3 \text{ ma} = 2$ _____ (pt.2)

(b) l'autospazio S relativo all'autovalore positivo e la relativa dimensione.

risposta: $S = \{(2a, a, 0) \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}\}$ $\dim S = 1$ _____ (pt.3)

4. In $E_3(\mathbb{R})$, si determinino:

(a) una rappresentazione cartesiana del piano α contenente $r : x + 1 = y - z + 1 = 0$ e ortogonale a $\beta : x + y + z = 0$;

risposta: $\alpha : y - z + 1 = 0$ _____ (pt.3)

(b) una rappresentazione cartesiana della retta s incidente $t_1 : \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$ e $t_2 : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}$ e

parallela alla retta $h : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$; **risposta:** $s : \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ 2y - 1 = 0 \end{cases}$ _____ (pt.3)

(c) una rappresentazione cartesiana della circonferenza \mathcal{C} descritta dal punto $P = (1, 1, 1)$ nella rotazione di asse $a : \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + z = 3 \end{cases}$;

risposta: $\begin{cases} x - 2y - z + 2 = 0 \\ (x - 3)^2 + (y + 5)^2 + z^2 = 41 \end{cases}$ _____ (pt.4)

(d) il centro C' e il raggio r della circonferenza \mathcal{C} ;

risposta: $C' = (1/2, 0, 5/2)$ $r = \sqrt{14}/2$ _____ (pt.3)

(e) una rappresentazione cartesiana della tangente alla circonferenza \mathcal{C} nel punto P .

risposta: $\begin{cases} x - 2y - z + 2 = 0 \\ 2x - 6y - z + 5 = 0 \end{cases}$ _____ (pt.2)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2° appello - 8.01.07

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

1. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, con il prodotto scalare euclideo, è dato $A = [(1, 1, 2), (1, 0, -1)]$. Si determinino:

(a) $\mathcal{L}(A)$ e il suo complemento ortogonale;

risposta: $\mathcal{L}(A) = \{a + b, a, 2a - b\} \in \mathbb{R}^3, a, b \in \mathbb{R}$ $A^\perp = \mathcal{L}((1, -3, 1))$ _____ (pt.3)

(b) una base ortogonale di $\mathcal{L}(A)$.

risposta: $((1, 1, 2), (7, 1, -4))$ _____ (pt.3)

2. Si dica quante sono le soluzioni del sistema $\begin{cases} y + (k+1)z = 0 \\ (k+1)x + 2y + 2z = k \\ x + (k+1)y + z = 2k \end{cases}$ al variare di k in \mathbb{R} .

risposta: $k \neq 0, -3 \exists!$ sol. , $k = 0 \infty^1$ sol. , $k = -3$ nessuna sol. _____ (pt.4)

3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, è data la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Si determinino:

(a) gli autovalori della matrice A con le relative molteplicità algebriche;

risposta: $t = -1 \quad ma = 2, t = 3 \quad ma = 1$ _____ (pt.2)

(b) l'autospazio S relativo all'autovalore positivo e la relativa dimensione.

risposta: $S = \{(0, 2a, a) \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}\} \quad \dim S = 1$ _____ (pt.3)

4. In $E_3(\mathbb{R})$, si determinino:

(a) una rappresentazione cartesiana del piano α contenente $r : x + y - 3 = z + 1 = 0$ e ortogonale a $\beta : x - y + z = 0$;

risposta: $\alpha : x + y - 3 = 0$ _____ (pt.3)

(b) una rappresentazione cartesiana della retta s incidente $t_1 : \begin{cases} x = -y \\ y = z \end{cases}$ e $t_2 : \begin{cases} y - 2z = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$

e parallela alla retta $h : \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + t, t \in \mathbb{R}; \\ z = t \end{cases}$ **risposta:** $s : \begin{cases} y - z = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases}$ _____ (pt.3)

(c) una rappresentazione cartesiana della circonferenza \mathcal{C} descritta dal punto $P = (1, 1, -1)$ nella rotazione di asse $a : \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - z = 3 \end{cases}$;

risposta: $\begin{cases} 2x - y + 2z + 1 = 0 \\ (x - 3)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 9 \end{cases}$ _____ (pt.4)

(d) il centro C' e il raggio r della circonferenza \mathcal{C} ;

risposta: $C' = (11/9, -1/9, -16/9) \quad r = \sqrt{17}/3$ _____ (pt.3)

(e) una rappresentazione cartesiana della tangente alla circonferenza \mathcal{C} nel punto P .

risposta: $\begin{cases} 2x - y + 2z + 1 = 0 \\ 2x - 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$ _____ (pt.2)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2° appello - 8.01.07

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

1. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, con il prodotto scalare euclideo, è dato $A = [(2, 1, 1), (-1, 0, 1)]$. Si determinino:

(a) $\mathcal{L}(A)$ e il suo complemento ortogonale;

risposta: $\mathcal{L}(A) = \{2a - b, a, a + b\} \in \mathbb{R}^3, a, b \in \mathbb{R}$ $A^\perp = \mathcal{L}((1, -3, 1))$ _____ (pt.3)

(b) una base ortogonale di $\mathcal{L}(A)$.

risposta: $((2, 1, 1), (-4, 1, 7))$ _____ (pt.3)

2. Si dica quante sono le soluzioni del sistema $\begin{cases} x + (2k + 1)y = k \\ 2x + 2y + (2k + 1)z = 2k \\ (2k + 1)x + y + z = 0 \end{cases}$ al variare di k in \mathbb{R} .

risposta: $k \neq 0, -3/2 \exists!$ sol. , $k = 0 \infty^1$ sol. , $k = -3/2$ nessuna sol. _____ (pt.4)

3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, è data la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Si deter-

minino:

(a) gli autovalori della matrice A con le relative molteplicità algebriche;

risposta: $t = 1 \quad ma = 1, t = -2 \quad ma = 1, t = -3 \quad ma = 1$ _____ (pt.2)

(b) l'autospazio S relativo all'autovalore positivo e la relativa dimensione.

risposta: $S = \{(a, 0, a) \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}\} \quad \dim S = 1$ _____ (pt.3)

4. In $E_3(\mathbb{R})$, si determinino:

(a) una rappresentazione cartesiana del piano α contenente $r : y - 1 = x - z - 1 = 0$ e ortogonale a $\beta : x + y - z = 0$;

risposta: $\alpha : x - 2y - z + 1 = 0$ _____ (pt.3)

(b) una rappresentazione cartesiana della retta s incidente $t_1 : \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$ e $t_2 : \begin{cases} y - 2x = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$ e

parallela alla retta $h : \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t, t \in \mathbb{R}; \\ z = 2 \end{cases}$ **risposta:** $s : \begin{cases} x - y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$ _____ (pt.3)

(c) una rappresentazione cartesiana della circonferenza \mathcal{C} descritta dal punto $P = (0, 1, 1)$ nella rotazione di asse $a : \begin{cases} 2x + y = 3 \\ y - z = 1 \end{cases}$;

risposta: $\begin{cases} x - 2y - 2z + 4 = 0 \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 2 \end{cases}$ _____ (pt.4)

(d) il centro C' e il raggio r della circonferenza \mathcal{C} ;

risposta: $C' = (2/3, 5/3, 2/3) \quad r = 1$ _____ (pt.3)

(e) una rappresentazione cartesiana della tangente alla circonferenza \mathcal{C} nel punto P .

risposta: $\begin{cases} x - 2y - 2z + 4 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$ _____ (pt.2)