UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 11.12.06

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

1. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, con il prodotto scalare euclideo, è data la base $B = ((1,2,0),(2,-1,0),(1,1,1))$. Si determinino:

(a) la base B' ottenuta applicando a B il procedimento di ortogonalizzazione;

risposta: $B' = ((1,2,0),(2,-1,0),(0,0,1))$ ______ **(pt.4)**

(b) la base ortonormale B'' ottenuta normalizzando i vettori di B'.

risposta: $B'' = ((1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0), (2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}, 0), (0,0,1))$ ______ **(pt.2)**

2. Si discuta la compatibilità del sistema $\begin{cases} kx - 4z = 2k \\ y = -1 \\ x - kz = 0 \\ y - (k-2)z = 0 \end{cases}$ al variare del parametro reale k.

risposta: il sistema è compatibile per $k = -2/3$ ______ **(pt.4)**

Posto $k = -2/3$ si determini l'insieme S delle soluzioni del sistema.

risposta: $S = \{(-1/4, -1, 3/8)\}$ ______ **(pt.2)**

3. In $\mathbf{R}^3(\mathbf{R})$ con il prodotto scalare euclideo, è data la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Si determinino:

(a) gli autovalori della matrice A con le relative molteplicità algebriche;

risposta: $t_1 = -2$ con $m.a. = 1$; $t_2 = 1$ con $m.a. = 2$ ______ **(pt.2)**

(b) l'autospazio S relativo all'autovalore positivo e la relativa dimensione;

risposta: $S_1 = \{(\alpha, 0, 0) \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}\}$; $\dim S_1 = 1$ ______ **(pt.3)**

(c) una base e la dimensione di $S^\perp$.

risposta: $B = ((0,1,0),(0,0,1))$; $\dim S^\perp = 2$ ______ **(pt.3)**

4. In $E_3(\mathbb{R})$, si determinino:

(a) una rappresentazione cartesiana della sfera S di centro $C = (1,2,1)$ e raggio $R = 5$;

risposta: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 25$ ______ **(pt.1)**

(b) una rappresentazione cartesiana della retta s passante per C e ortogonale al piano coordinato xz; **risposta:** $\begin{cases} x = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ ______ **(pt.2)**

(c) le coordinate dei punti A e B della retta s che appartengono alla sfera S, essendo A il punto di coordinate positive;

risposta: $A = (1,7,1)$, $B = (1,-3,1)$ ______ **(pt.1)**

(d) una rappresentazione cartesiana della circonferenza $\mathcal{C}$ ottenuta sezionando S con il piano γ passante per il punto medio del segmento $\overline{AC}$ e ortogonale alla retta s;

risposta: $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 25 \\ y = 9/2 \end{cases}$ ______ **(pt.3)**

(e) il centro C' e il raggio r della circonferenza $\mathcal{C}$.

risposta: $C' = (1, 9/2, 1)$; $r = \frac{5}{2}\sqrt{3}$ ______ **(pt.3)**

2

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 11.12.06

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

1. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, con il prodotto scalare euclideo, è data la base $B = ((3,2,0),(-2,3,0),(2,1,2))$. Si determinino:

(a) la base B' ottenuta applicando a B il procedimento di ortogonalizzazione;

risposta: $B' = ((3,2,0),(-2,3,0),(0,0,1))$ ______ **(pt.4)**

(b) la base ortonormale B'' ottenuta normalizzando i vettori di B'.

risposta: $B'' = ((3/\sqrt{13}, 2/\sqrt{13}, 0), (-2/\sqrt{13}, 3/\sqrt{13}, 0), (0,0,1))$ ______ **(pt.2)**

2. Si discuta la compatibilità del sistema $\begin{cases} kx - y = 3k \\ z = 3 \\ x - ky = -1 \\ (k-1)y + z = 0 \end{cases}$ al variare del parametro reale k.

risposta: il sistema è compatibile per $k = -3/7$ ______ **(pt.4)**

Posto $k = -3/7$ si determini l'insieme S delle soluzioni del sistema.

risposta: $S = \{(-19/10, 21/10, 3)\}$ ______ **(pt.2)**

3. In $\mathbf{R}^3(\mathbf{R})$ con il prodotto scalare euclideo, è data la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Si determinino:

(a) gli autovalori della matrice A con le relative molteplicità algebriche;

risposta: $t_1 = 3$ con $m.a. = 1$; $t_2 = -2$ con $m.a. = 1$ $t_3 = -1$ con $m.a. = 1$ ______ **(pt.2)**

(b) l'autospazio S relativo all'autovalore positivo e la relativa dimensione;

risposta: $S = \{(4\alpha, 0, \alpha) \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}\}$; $\dim S = 1$ ______ **(pt.3)**

(c) una base e la dimensione di $S^\perp$.

risposta: $B = ((1,0,-4),(0,1,0))$; $\dim S^\perp = 2$ ______ **(pt.3)**

4. In $E_3(\mathbb{R})$, si determinino:

(a) una rappresentazione cartesiana della sfera S di centro $C = (2,1,2)$ e raggio $R = 3$;

risposta: $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$ ______ **(pt.1)**

(b) una rappresentazione cartesiana della retta s passante per C e ortogonale al piano coordinato xy; **risposta:** $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ ______ **(pt.2)**

(c) le coordinate dei punti A e B della retta s che appartengono alla sfera S, essendo A il punto di coordinate positive;

risposta: $A = (2,1,5)$, $B = (2,1,-1)$ ______ **(pt.1)**

(d) una rappresentazione cartesiana della circonferenza $\mathcal{C}$ ottenuta sezionando S con il piano γ passante per il punto medio del segmento $\overline{AC}$ e ortogonale alla retta s;

risposta: $\begin{cases} ((x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9 \\ z = 7/2 \end{cases}$ ______ **(pt.3)**

(e) il centro C' e il raggio r della circonferenza $\mathcal{C}$.

risposta: $C' = (2,1,7/2)$; $r = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ ______ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 11.12.06

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

1. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, con il prodotto scalare euclideo, è data la base $B = ((2,2,0),(2,-2,0),(3,1,1))$. Si determinino:

(a) la base B' ottenuta applicando a B il procedimento di ortogonalizzazione;

risposta: $B' = ((2,2,0),(2,-2,0),(0,0,1))$ __________ **(pt.4)**

(b) la base ortonormale B'' ottenuta normalizzando i vettori di B'.

risposta: $B'' = ((1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0),(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0),(0,0,1))$ __________ **(pt.2)**

2. Si discuta la compatibilità del sistema $\begin{cases} y + kz = 4 \\ x = 2 \\ ky + z = 2 \\ x + (k+1)z = 0 \end{cases}$ al variare del parametro reale k.

risposta: il sistema è compatibile per $k = 2/3$ __________ **(pt.4)**

Posto $k = 2/3$ si determini l'insieme S delle soluzioni del sistema.

risposta: $S = \{(2, 24/5, -6/5)\}$ __________ **(pt.2)**

3. In $\mathbf{R}^3(\mathbf{R})$ con il prodotto scalare euclideo, è data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. Si determinino:

(a) gli autovalori della matrice A con le relative molteplicità algebriche;

risposta: $t_1 = 1$ con $m.a. = 1$; $t_2 = -1$ con $m.a. = 1$ $t_3 = -3$ con $m.a. = 1$ __________ **(pt.2)**

(b) l'autospazio S relativo all'autovalore positivo e la relativa dimensione;

risposta: $S = \{(\alpha, 0, 0) \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}\}$; $\dim S = 1$ __________ **(pt.3)**

(c) una base e la dimensione di $S^\perp$.

risposta: $B = ((0,1,0),(0,0,1))$; $\dim S^\perp = 2$ __________ **(pt.3)**

4. In $E_3(\mathbb{R})$, si determinino:

(a) una rappresentazione cartesiana della sfera S di centro $C = (4,1,1)$ e raggio $R = 7$;

risposta: $(x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 49$ __________ **(pt.1)**

(b) una rappresentazione cartesiana della retta s passante per C e ortogonale al piano coordinato yz; **risposta:** $\begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ __________ **(pt.2)**

(c) le coordinate dei punti A e B della retta s che appartengono alla sfera S, essendo A il punto di coordinate positive;

risposta: $A = (11,1,1)$, $B = (-3,1,1)$ __________ **(pt.1)**

(d) una rappresentazione cartesiana della circonferenza $\mathcal{C}$ ottenuta sezionando S con il piano γ passante per il punto medio del segmento $\overline{AC}$ e ortogonale alla retta s;

risposta: $\begin{cases} (x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 49 \\ x = 15/2 \end{cases}$ __________ **(pt.3)**

(e) il centro C' e il raggio r della circonferenza $\mathcal{C}$.

risposta: $C' = (15/2, 1, 1)$; $r = \frac{7}{2}\sqrt{3}$ __________ **(pt.3)**

4

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 11.12.06

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

1. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, con il prodotto scalare euclideo, è data la base $B = ((3,1,0),(1,-3,0),(1,3,1))$. Si determinino:

(a) la base B' ottenuta applicando a B il procedimento di ortogonalizzazione;

risposta: $B' = ((3,1,0),(1,-3,0),(0,0,1))$ ______ **(pt.4)**

(b) la base ortonormale B'' ottenuta normalizzando i vettori di B'.

risposta: $B'' = ((3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10}, 0),(1/\sqrt{10}, -3/\sqrt{10}, 0),(0,0,1))$ ______ **(pt.2)**

2. Si discuta la compatibilità del sistema $\begin{cases} ky - z = 3k \\ x = 3 \\ y - kz = -1 \\ x + (k-1)z = 0 \end{cases}$ al variare del parametro reale k.

risposta: il sistema è compatibile per $k = -3/7$ ______ **(pt.4)**

Posto $k = -3/7$ si determini l'insieme S delle soluzioni del sistema.

risposta: $S = \{(3, -19/10, 21/10)\}$ ______ **(pt.2)**

3. In $\mathbf{R}^3(\mathbf{R})$ con il prodotto scalare euclideo, è data la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Si determinino:

(a) gli autovalori della matrice A con le relative molteplicità algebriche;

risposta: $t_1 = -1$ con $m.a. = 1$; $t_2 = 4$ con $m.a. = 2$ ______ **(pt.2)**

(b) l'autospazio S relativo all'autovalore positivo e la relativa dimensione;

risposta: $S = \{(0, \alpha, 0) \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}\}$; $\dim S = 1$ ______ **(pt.3)**

(c) una base e la dimensione di $S^\perp$.

risposta: $B = ((1,0,0),(0,0,1))$; $\dim S^\perp = 2$ ______ **(pt.3)**

4. In $E_3(\mathbb{R})$, si determinino:

(a) una rappresentazione cartesiana della sfera S di centro $C = (2,1,1)$ e raggio $R = 3$;

risposta: $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9$ ______ **(pt.1)**

(b) una rappresentazione cartesiana della retta s passante per C e ortogonale al piano coordinato xy; **risposta:** $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ ______ **(pt.2)**

(c) le coordinate dei punti A e B della retta s che appartengono alla sfera S, essendo A il punto di coordinate positive;

risposta: $A = (2,1,4)$, $B = (2,1,-2)$ ______ **(pt.1)**

(d) una rappresentazione cartesiana della circonferenza $\mathcal{C}$ ottenuta sezionando S con il piano γ passante per il punto medio del segmento $\overline{AC}$ e ortogonale alla retta s;

risposta: $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 9 \\ z = 5/2 \end{cases}$ ______ **(pt.3)**

(e) il centro C' e il raggio r della circonferenza $\mathcal{C}$.

risposta: $C' = (2,1,5/2)$; $r = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ ______ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 11.12.06

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

1. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, con il prodotto scalare euclideo, è data la base $B = ((4,2,0),(2,-4,0),(1,1,1))$. Si determinino:

(a) la base B' ottenuta applicando a B il procedimento di ortogonalizzazione;

risposta: $B' = ((4,2,0),(2,-4,0),(0,0,1))$ ______ **(pt.4)**

(b) la base ortonormale B'' ottenuta normalizzando i vettori di B'.

risposta: $B'' = ((2/\sqrt{5},1/\sqrt{5},0),(1/\sqrt{5},-2/\sqrt{5},0),(0,0,1))$ ______ **(pt.2)**

2. Si discuta la compatibilità del sistema $\begin{cases} 4x - ky = -2k \\ z = -1 \\ kx - y = 0 \\ (k-2)x - z = 0 \end{cases}$ al variare del parametro reale k.

risposta: il sistema è compatibile per $k = -2/3$ ______ **(pt.4)**

Posto $k = -2/3$ si determini l'insieme S delle soluzioni del sistema.

risposta: $S = \{(3/8,-1/4,-1)\}$ ______ **(pt.2)**

3. In $\mathbf{R}^3(\mathbf{R})$ con il prodotto scalare euclideo, è data la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Si determinino:

(a) gli autovalori della matrice A con le relative molteplicità algebriche;

risposta: $t_1 = -2$ con $m.a. = 1$; $t_2 = -1$ con $m.a. = 1$; $t_3 = 2$ con $m.a. = 1$ ______ **(pt.2)**

(b) l'autospazio S relativo all'autovalore positivo e la relativa dimensione;

risposta: $S = \{(2\alpha, 6\alpha, -\alpha) \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}\}$; $\dim S = 1$ ______ **(pt.3)**

(c) una base e la dimensione di $S^\perp$.

risposta: $B = ((1,0,2),(0,1,6))$; $\dim S^\perp = 2$ ______ **(pt.3)**

4. In $E_3(\mathbb{R})$, si determinino:

(a) una rappresentazione cartesiana della sfera S di centro $C = (3,1,2)$ e raggio $R = 5$;

risposta: $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 25$ ______ **(pt.1)**

(b) una rappresentazione cartesiana della retta s passante per C e ortogonale al piano coordinato xz; **risposta:** $\begin{cases} x = 3 \\ z = 2 \end{cases}$ ______ **(pt.2)**

(c) le coordinate dei punti A e B della retta s che appartengono alla sfera S, essendo A il punto di coordinate positive;

risposta: $A = (3,6,2)$, $B = (3,-4,2)$ ______ **(pt.1)**

(d) una rappresentazione cartesiana della circonferenza $\mathcal{C}$ ottenuta sezionando S con il piano γ passante per il punto medio del segmento $\overline{AC}$ e ortogonale alla retta s;

risposta: $\begin{cases} (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 25 \\ y = 7/2 \end{cases}$ ______ **(pt.3)**

(e) il centro C' e il raggio r della circonferenza $\mathcal{C}$.

risposta: $C' = (3,7/2,2)$; $r = \frac{5}{2}\sqrt{3}$ ______ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 11.12.06

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

1. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, con il prodotto scalare euclideo, è data la base $B = ((4,1,0),(1,-4,0),(1,-1,3))$. Si determinino:

(a) la base B' ottenuta applicando a B il procedimento di ortogonalizzazione;

risposta: $B' = ((4,1,0),(1,-4,0),(0,0,1))$ **(pt.4)**

(b) la base ortonormale B'' ottenuta normalizzando i vettori di B'.

risposta: $B'' = ((4/\sqrt{17}, 1/\sqrt{17}, 0),(1/\sqrt{17}, -4/\sqrt{17}, 0),(0,0,1))$ **(pt.2)**

2. Si discuta la compatibilità del sistema $\begin{cases} kx + z = 4 \\ y = 2 \\ x + kz = 2 \\ (k+1)x + y = 0 \end{cases}$ al variare del parametro reale k.

risposta: il sistema è compatibile per $k = 2/3$ **(pt.4)**

Posto $k = 2/3$ si determini l'insieme S delle soluzioni del sistema.

risposta: $S = \{(-6/5, 2, 24/5)\}$ **(pt.2)**

3. In $\mathbf{R}^3(\mathbf{R})$ con il prodotto scalare euclideo, è data la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Si determinino:

(a) gli autovalori della matrice A con le relative molteplicità algebriche;

risposta: $t_1 = -2$ con $m.a. = 1$; $t_2 = 1$ con $m.a. = 2$ **(pt.2)**

(b) l'autospazio S relativo all'autovalore positivo e la relativa dimensione;

risposta: $S = \{(0,\alpha,0) \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}\}$; $\dim S = 1$ **(pt.3)**

(c) una base e la dimensione di $S^\perp$.

risposta: $B = ((1,0,0),(0,0,1))$; $\dim S^\perp = 2$ **(pt.3)**

4. In $E_3(\mathbb{R})$, si determinino:

(a) una rappresentazione cartesiana della sfera S di centro $C = (1,1,4)$ e raggio $R = 7$;

risposta: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 49$ **(pt.1)**

(b) una rappresentazione cartesiana della retta s passante per C e ortogonale al piano coordinato yz; **risposta:** $\begin{cases} y = 1 \\ z = 4 \end{cases}$ **(pt.2)**

(c) le coordinate dei punti A e B della retta s che appartengono alla sfera S, essendo A il punto di coordinate positive;

risposta: $A = (8,1,4)$, $B = (-6,1,4)$ **(pt.1)**

(d) una rappresentazione cartesiana della circonferenza $\mathcal{C}$ ottenuta sezionando S con il piano γ passante per il punto medio del segmento $\overline{AC}$ e ortogonale alla retta s;

risposta: $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 49 \\ x = 9/2 \end{cases}$ **(pt.3)**

(e) il centro C' e il raggio r della circonferenza $\mathcal{C}$.

risposta: $C' = (9/2, 1, 4)$; $r = \frac{7}{2}\sqrt{3}$ **(pt.3)**