UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1 appello - 13.01.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

- Si determinino gli autovalori di A e, per ogni autovalore trovato, le molteplicità algebrica e geometrica e il relativo autospazio.

  Risposta $\lambda = 1$ con $a = g = 1$, $V_{(1)} = \{(0, -a, a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\}$
  $\lambda = 2$ con $a = g = 1$, $V_{(2)} = \{(b, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid b \in \mathbb{R}\}$
  $\lambda = 3$ con $a = g = 1$, $V_{(3)} = \{(3c, -3c, 2c) \in \mathbb{R}^3 \mid c \in \mathbb{R}\}$ ____________ **(pt.3)**

- Si trovi una matrice diagonale simile ad A e la relativa matrice diagonalizzante.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ____________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & k & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice dei coefficienti;

  Risposta $k \neq -3 \wedge k \neq 2 : \rho(A) = 3, \quad k = -3 \vee k = 2 : \rho(A) = 2$ ____________ **(pt.2)**

- il rango della matrice completa;

  Risposta $k \neq 2 : \rho(A|B) = 3, \quad k = 2 : \rho(A|B) = 2$ ____________ **(pt.2)**

- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.

  Risposta compatibile per $k \neq -3$; $\quad k \neq -3 \wedge k \neq 2 : \exists!\ sol, \quad k = 2 : \infty^1 sol$ ____________ **(pt.2)**

- Posto $k = 2$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.

  Risposta $\{(5a, 1 - 4a, a) \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}\}$ ____________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $h : \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ e $k : \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie Q generata da h nella rotazione di asse k.

  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 6xy - 6xz + 6yz = 0$ ____________ **(pt.5)**

- Si riconosca Q e se ne determinino gli eventuali punti multipli.

  Risposta Si tratta di un cono dotato di falda reale con vertice in $V = (0, 0, 0)$ che risulta essere il suo unico punto doppio. ____________ **(pt.2)**

- Le coniche $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, ottenute sezionando Q rispettivamente con i piani $\alpha : x - y = 0$ e $\beta : x = 1$ sono una riducibile e l'altra irriducibile.
  Si dica quale è la riducibile e se ne determinino le rette componenti.
  Si dica, motivando la risposta, se la sezione irriducibile è un'ellisse, un'iperbole o una parabola.

  Risposta $\mathcal{C}_1 = t_1 \bigcup t_2$ con $t_1 : \begin{cases} 2x - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ e $t_2 : \begin{cases} 2x + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$
  $\mathcal{C}_2$ è un'iperbole in quanto sezione piana irriducibile di un cilindro iperbolico ____________ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana $4xy - 3y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$. Si riconosca e si studi la conica $\mathcal{C}$ determinandone, se esistono e sono reali, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi.

Risposta Si tratta di un'iperbole di centro $C = (1, 1)$, asintoti: $4x - 3y - 1 = 0$, $y = 1$ e assi: $x - 2y + 1 = 0$, $2x + y - 3 = 0$. ____________ **(pt.6)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1 appello - 13.01.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Si determinino gli autovalori di A e, per ogni autovalore trovato, le molteplicità algebrica e geometrica e il relativo autospazio.

  Risposta $\lambda = -2$ con $a = g = 1$, $V_{(-2)} = \{(-a, -2a, a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\}$
  $\lambda = 0$ con $a = g = 1$, $V_{(0)} = \{(b, 0, b) \in \mathbb{R}^3 \mid b \in \mathbb{R}\}$
  $\lambda = 4$ con $a = g = 1$, $V_{(4)} = \{(-c, c, c) \in \mathbb{R}^3 \mid c \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.3)**

- Si trovi una matrice diagonale simile ad A e la relativa matrice diagonalizzante.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ k+1 & 1 & -1 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -k \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice dei coefficienti;

  Risposta $k \neq 0 \wedge k \neq -2 : \rho(A) = 3, \quad k = 0 \vee k = -2 : \rho(A) = 2$ ________ **(pt.2)**
- il rango della matrice completa;

  Risposta $k \neq -2 : \rho(A|B) = 3, \quad k = -2 : \rho(A|B) = 2$ ________ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.

  Risposta compatibile per $k \neq 0$; $\quad k \neq 0 \wedge k \neq -2 : \exists!\ sol, \quad k = -2 : \infty^1 sol$ ________ **(pt.2)**
- Posto $k = -2$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.

  Risposta $\{(a, 3a-2, 2a-2) \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $h : \begin{cases} z - 2x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ e $k : \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie Q generata da h nella rotazione di asse k.

  Risposta $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 6xy - 6xz + 6yz = 0$ ________ **(pt.5)**
- Si riconosca Q e se ne determinino gli eventuali punti multipli.

  Risposta Si tratta di un cono dotato di falda reale con vertice in $V = (0, 0, 0)$ che risulta essere il suo unico punto doppio. ________ **(pt.2)**
- Le coniche $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, ottenute sezionando Q rispettivamente con i piani $\alpha : x - y = 0$ e $\beta : y = 2$ sono una riducibile e l'altra irriducibile.
  Si dica quale è la riducibile e se ne determinino le rette componenti.
  Si dica, motivando la risposta, se la sezione irriducibile è un'ellisse, un'iperbole o una parabola.

  Risposta $\mathcal{C}_1 = t_1 \bigcup t_2$ con $t_1 : \begin{cases} 4x + i\sqrt{5}z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ e $t_2 : \begin{cases} 4x - i\sqrt{5}z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$
  $\mathcal{C}_2$ è un'ellisse in quanto sezione piana irriducibile di un cilindro ellittico ________ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana $-2x^2 + 2xy - 2y = 0$. Si riconosca e si studi la conica $\mathcal{C}$ determinandone, se esistono e sono reali, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi.

Risposta Si tratta di un'iperbole di centro $C = (1, 2)$, asintoti: $x - y + 1 = 0$, $x = 1$ e assi: $(1+\sqrt{2})x - y + (1-\sqrt{2}) = 0$, $(1-\sqrt{2})x - y + (1+\sqrt{2}) = 0$. ________ **(pt.6)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1 appello - 13.01.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Si determinino gli autovalori di A e, per ogni autovalore trovato, le molteplicità algebrica e geometrica e il relativo autospazio.

  Risposta $\lambda = -2$ con $a = g = 1$, $V_{(-2)} = \{(a, 0, -2a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\}$
  $\lambda = 1$ con $a = g = 1$, $V_{(1)} = \{(0, b, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid b \in \mathbb{R}\}$
  $\lambda = 3$ con $a = g = 1$, $V_{(3)} = \{(2c, 0, c) \in \mathbb{R}^3 \mid c \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.3)**

- Si trovi una matrice diagonale simile ad A e la relativa matrice diagonalizzante.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -k & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2k \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice dei coefficienti;

  Risposta $k \neq -2 \wedge k \neq 2 : \rho(A) = 3, \quad k = -2 \vee k = 2 : \rho(A) = 2$ ________ **(pt.2)**

- il rango della matrice completa;

  Risposta $k \neq -2 : \rho(A|B) = 3, \quad k = -2 : \rho(A|B) = 2$ ________ **(pt.2)**

- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.

  Risposta compatibile per $k \neq 2$; $k \neq -2 \wedge k \neq 2 : \exists! \; sol$, $k = -2 : \infty^1 sol$ ________ **(pt.2)**

- Posto $k = -2$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.

  Risposta $\{(-\frac{5}{2} - a, a, \frac{3}{4}) \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $h : \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ e $k : \begin{cases} 2x - z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie Q generata da h nella rotazione di asse k.

  Risposta $7x^2 + y^2 + z^2 - 8xy - 8xz - 16yz = 0$ ________ **(pt.5)**

- Si riconosca Q e se ne determinino gli eventuali punti multipli.

  Risposta Si tratta di un cono dotato di falda reale con vertice in $V = (0, 0, 0)$ che risulta essere il suo unico punto doppio. ________ **(pt.2)**

- Le coniche $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, ottenute sezionando Q rispettivamente con i piani $\alpha : x + 2y = 0$ e $\beta : z = 1$ sono una riducibile e l'altra irriducibile.
  Si dica quale è la riducibile e se ne determinino le rette componenti.
  Si dica, motivando la risposta, se la sezione irriducibile è un'ellisse, un'iperbole o una parabola.

  Risposta $\mathcal{C}_1 = t_1 \bigcup t_2$ con $t_1 : \begin{cases} 3\sqrt{5}y + iz = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ e $t_2 : \begin{cases} 3\sqrt{5}y - iz = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$
  $\mathcal{C}_2$ è un'iperbole in quanto sezione piana irriducibile di un cilindro iperbolico ________ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana $3x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 6y = 0$. Si riconosca e si studi la conica $\mathcal{C}$ determinandone, se esistono e sono reali, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi.

Risposta Si tratta di un'iperbole di centro $C = (-4, 5)$, asintoti: $x + y - 1 = 0$, $3x + y + 7 = 0$ e assi: $(\sqrt{5} - 1)x - 2y + 6 + 4\sqrt{5} = 0$ e $(1 + \sqrt{5})x + 2y - 6 + 4\sqrt{5} = 0$. ________ **(pt.6)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1 appello - 13.01.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & 6 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

- Si determinino gli autovalori di A e, per ogni autovalore trovato, le molteplicità algebrica e geometrica e il relativo autospazio.
  Risposta $\lambda = 1$ con $a = g = 1$, $V_{(1)} = \{(0, -a, a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\}$
  $\lambda = 3$ con $a = g = 1$, $V_{(3)} = \{(3b, 3b, -2b) \in \mathbb{R}^3 \mid b \in \mathbb{R}\}$
  $\lambda = 4$ con $a = g = 1$, $V_{(4)} = \{(c, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid c \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.3)**
- Si trovi una matrice diagonale simile ad A e la relativa matrice diagonalizzante.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & k & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice dei coefficienti;
  Risposta $k \neq -3 \wedge k \neq 2 : \rho(A) = 3, \quad k = -3 \vee k = 2 : \rho(A) = 2$ ______ **(pt.2)**
- il rango della matrice completa;
  Risposta $k \neq 2 : \rho(A|B) = 3, \quad k = 2 : \rho(A|B) = 2$ ______ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta compatibile per $k \neq -3$; $\quad k \neq -3 \wedge k \neq 2 : \exists!\ sol, \quad k = 2 : \infty^1 sol$ ______ **(pt.2)**
- Posto $k = 2$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.
  Risposta $\{(5a, 2 - 4a, a) \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $h : \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ e $k : \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie Q generata da h nella rotazione di asse k.
  Risposta $x^2 + 10y^2 + 10z^2 - 12xy - 12xz + 24yz = 0$ ______ **(pt.5)**
- Si riconosca Q e se ne determinino gli eventuali punti multipli.
  Risposta Si tratta di un cono dotato di falda reale con vertice in $V = (0, 0, 0)$ che risulta essere il suo unico punto doppio. ______ **(pt.2)**
- Le coniche $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, ottenute sezionando Q rispettivamente con i piani $\alpha : x - 2y = 0$ e $\beta : x = 1$ sono una riducibile e l'altra irriducibile.
  Si dica quale è la riducibile e se ne determinino le rette componenti.
  Si dica, motivando la risposta, se la sezione irriducibile è un'ellisse, un'iperbole o una parabola.

  Risposta $\mathcal{C}_1 = t_1 \bigcup t_2$ con $t_1 : \begin{cases} z + y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ e $t_2 : \begin{cases} z - y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$
  $\mathcal{C}_2$ è un'iperbole in quanto sezione piana irriducibile di un cilindro iperbolico ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana $4xy - 3y^2 - 8x + 4y + 16 = 0$. Si riconosca e si studi la conica $\mathcal{C}$ determinandone, se esistono e sono reali, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi.

Risposta Si tratta di un'iperbole di centro $C = (2, 2)$, asintoti: $4x - 3y - 2 = 0$, $y = 2$ e assi: $x - 2y + 2 = 0$, $2x + y - 6 = 0$. ______ **(pt.6)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1 appello - 13.01.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

- Si determinino gli autovalori di A e, per ogni autovalore trovato, le molteplicità algebrica e geometrica e il relativo autospazio.

  Risposta $\lambda = -5$ con $a = g = 1$, $V_{(-5)} = \{(0, -a, a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\}$
  $\lambda = 0$ con $a = g = 1$, $V_{(0)} = \{(-b, b, b) \in \mathbb{R}^3 \mid b \in \mathbb{R}\}$
  $\lambda = 4$ con $a = g = 1$, $V_{(4)} = \{(9c, 7c, 11c) \in \mathbb{R}^3 \mid c \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.3)**

- Si trovi una matrice diagonale simile ad A e la relativa matrice diagonalizzante.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 9 \\ -1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 11 \end{pmatrix}$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ k+1 & 1 & -1 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2k \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice dei coefficienti;

  Risposta $k \neq 0 \wedge k \neq -2 : \rho(A) = 3, \quad k = 0 \vee k = -2 : \rho(A) = 2$ ________ **(pt.2)**

- il rango della matrice completa;

  Risposta $k \neq -2 : \rho(A|B) = 3, \quad k = -2 : \rho(A|B) = 2$ ________ **(pt.2)**

- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.

  Risposta compatibile per $k \neq 0$; $\quad k \neq 0 \wedge k \neq -2 : \exists!\ sol, \quad k = -2 : \infty^1 sol$ ________ **(pt.2)**

- Posto $k = -2$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.

  Risposta $\{(a, 3a-4, 2a-4) \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $h : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ e $k : \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie Q generata da h nella rotazione di asse k.

  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 6xy - 6xz + 6yz = 0$ ________ **(pt.5)**

- Si riconosca Q e se ne determinino gli eventuali punti multipli.

  Risposta Si tratta di un cono dotato di falda reale con vertice in $V = (0, 0, 0)$ che risulta essere il suo unico punto doppio. ________ **(pt.2)**

- Le coniche $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, ottenute sezionando Q rispettivamente con i piani $\alpha : x - y = 0$ e $\beta : y = 2$ sono una riducibile e l'altra irriducibile.
  Si dica quale è la riducibile e se ne determinino le rette componenti.
  Si dica, motivando la risposta, se la sezione irriducibile è un'ellisse, un'iperbole o una parabola.

  Risposta $\mathcal{C}_1 = t_1 \bigcup t_2$ con $t_1 : \begin{cases} 2x - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ e $t_2 : \begin{cases} 2x + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$
  $\mathcal{C}_2$ è un'iperbole in quanto sezione piana irriducibile di un cilindro iperbolico ________ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana $-2x^2 + 2xy - 4y = 0$. Si riconosca e si studi la conica $\mathcal{C}$ determinandone, se esistono e sono reali, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi.

Risposta Si tratta di un'iperbole di centro C$=(2, 4)$, asintoti: $x - y + 2 = 0$, $x = 2$ e assi: $(1+\sqrt{2})x - y + 2(1-\sqrt{2}) = 0$ e $(1-\sqrt{2})x - y + 2(1+\sqrt{2}) = 0$. ________ **(pt.6)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1 appello - 13.01.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -4 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

- Si determinino gli autovalori di A e, per ogni autovalore trovato, le molteplicità algebrica e geometrica e il relativo autospazio.
  Risposta $\lambda = 1$ con $a = g = 1$, $V_{(1)} = \{(0, 2a, 3a) \in \mathbb{R}^3 \mid a \in \mathbb{R}\}$
  $\lambda = 2$ con $a = g = 1$, $V_{(2)} = \{(b, 3b, 3b) \in \mathbb{R}^3 \mid b \in \mathbb{R}\}$
  $\lambda = 3$ con $a = g = 1$, $V_{(3)} = \{(0, c, c) \in \mathbb{R}^3 \mid c \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.3)**
- Si trovi una matrice diagonale simile ad A e la relativa matrice diagonalizzante.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -k & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4k \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice dei coefficienti;
  Risposta $k \neq -2 \wedge k \neq 2 : \rho(A) = 3, \quad k = -2 \vee k = 2 : \rho(A) = 2$ ______ **(pt.2)**
- il rango della matrice completa;
  Risposta $k \neq -2 : \rho(A|B) = 3, \quad k = -2 : \rho(A|B) = 2$ ______ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta compatibile per $k \neq 2$; $k \neq -2 \wedge k \neq 2 : \exists!\ sol$, $k = -2 : \infty^1 sol$ ______ **(pt.2)**
- Posto $k = -2$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.
  Risposta $\{(-5 - a, a, \frac{3}{2}) \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $h : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ z - y = 0 \end{cases}$ e $k : \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie Q generata da h nella rotazione di asse k.
  Risposta $x^2 + y^2 + 7z^2 - 16xy - 8xz - 8yz = 0$ ______ **(pt.5)**
- Si riconosca Q e se ne determinino gli eventuali punti multipli.
  Risposta Si tratta di un cono dotato di falda reale con vertice in $V = (0, 0, 0)$ che risulta essere il suo unico punto doppio. ______ **(pt.2)**
- Le coniche $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, ottenute sezionando Q rispettivamente con i piani $\alpha : 2y + z = 0$ e $\beta : z = 1$ sono una riducibile e l'altra irriducibile.
  Si dica quale è la riducibile e se ne determinino le rette componenti.
  Si dica, motivando la risposta, se la sezione irriducibile è un'ellisse, un'iperbole o una parabola.

  Risposta $\mathcal{C}_1 = t_1 \bigcup t_2$ con $t_1 : \begin{cases} x + i3\sqrt{5}y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$ e $t_2 : \begin{cases} x - i3\sqrt{5}y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$
  $\mathcal{C}_2$ è un'iperbole in quanto sezione piana irriducibile di un cilindro iperbolico ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana $3x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 2y = 0$. Si riconosca e si studi la conica $\mathcal{C}$ determinandone, se esistono e sono reali, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi.

Risposta Si tratta di un'iperbole di centro $C = (0, -1)$, asintoti: $x+y+1 = 0$, $3x+y+1 = 0$ e assi: $(1-\sqrt{5})x+2y+2 = 0$ e $(1 + \sqrt{5})x + 2y + 2 = 0$. ______ **(pt.6)**