UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II prova intermedia - 13.01.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati la retta $r : \begin{cases} x - z = k - 1 \\ x + ky = 1 \end{cases}$ ed il piano $\pi : x + ky + z = 1$. Se ne determini la mutua posizione al variare del parametro reale k.

Risposta $k \neq 0$: incidenti; $k = 0$: paralleli e disgiunti ______ **(pt.3)**

Posto $k = 1$, si determini una rappresentazione cartesiana della proiezione ortogonale di r su π.

Risposta $\begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini una rappresentazione cartesiana del piano, se esiste, che contiene le rette $r : \begin{cases} x - y = 1 \\ x - z = 1 \end{cases}$ ed $s : \begin{cases} 3x - y - z = 2 \\ x = 0 \end{cases}$.

Risposta $2x - y - z = 2$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $h : \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ e $k : \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie Q generata da h nella rotazione di asse k.

  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 6xy - 6xz + 6yz = 0$ ______ **(pt.5)**

- Si riconosca Q e se ne determinino gli eventuali punti multipli.

  Risposta Si tratta di un cono dotato di falda reale con vertice in $V = (0, 0, 0)$ che risulta essere il suo unico punto doppio. ______ **(pt.2)**

- Le coniche $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, ottenute sezionando Q rispettivamente con i piani $\alpha : x - y = 0$ e $\beta : x = 1$ sono una riducibile e l'altra irriducibile.
  Si dica quale è la riducibile e se ne determinino le rette componenti.
  Si dica, motivando la risposta, se la sezione irriducibile è un'ellisse, un'iperbole o una parabola.

  Risposta $\mathcal{C}_1 = t_1 \bigcup t_2$ con $t_1 : \begin{cases} 2x - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ e $t_2 : \begin{cases} 2x + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

  $\mathcal{C}_2$ è un'iperbole in quanto sezione piana irriducibile di un cilindro iperbolico ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ sia consideri la conica $\mathcal{C}_k$ di equazione cartesiana $2kxy + (1 - k^2)y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$. Al variare del parametro reale k si determinino:

- i valori di k per i quali il punto $P = (1, -1)$ è il polo della retta $r : 2y + 1 = 0$ rispetto alla conica $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k = -2$ ______ **(pt.2)**

- i valori di k per i quali $\mathcal{C}_k$ risulta una parabola.

  Risposta $k = 0$ ______ **(pt.2)**

  Posto $k = 2$, si riconosca e si studi la conica $\mathcal{C}_2$ determinandone, se esistono e sono reali, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi.

  Risposta Si tratta di un'iperbole di centro $C = (1, 1)$, asintoti: $4x - 3y - 1 = 0$, $y = 1$ e assi: $x - 2y + 1 = 0$, $2x + y - 3 = 0$. ______ **(pt.5)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II prova intermedia - 13.01.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati la retta $r : \begin{cases} x - y = k - 1 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$ ed il piano $\pi : kx + y + kz = 1$. Se ne determini la mutua posizione al variare del parametro reale k.

Risposta $k \neq -2$: incidenti; $k = -2$: paralleli e disgiunti ______ **(pt.3)**

Posto $k = 1$, si determini una rappresentazione cartesiana della proiezione ortogonale di r su π.

Risposta $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini una rappresentazione cartesiana del piano, se esiste, che contiene le rette $r : \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ ed $s : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

Risposta $2x - y + z = 0$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $h : \begin{cases} z - 2x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ e $k : \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie Q generata da h nella rotazione di asse k.

  Risposta $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 6xy - 6xz + 6yz = 0$ ______ **(pt.5)**

- Si riconosca Q e se ne determinino gli eventuali punti multipli.

  Risposta Si tratta di un cono dotato di falda reale con vertice in $V = (0, 0, 0)$ che risulta essere il suo unico punto doppio. ______ **(pt.2)**

- Le coniche $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, ottenute sezionando Q rispettivamente con i piani $\alpha : x - y = 0$ e $\beta : y = 2$ sono una riducibile e l'altra irriducibile.
  Si dica quale è la riducibile e se ne determinino le rette componenti.
  Si dica, motivando la risposta, se la sezione irriducibile è un'ellisse, un'iperbole o una parabola.

  Risposta $\mathcal{C}_1 = t_1 \bigcup t_2$ con $t_1 : \begin{cases} 4x + i\sqrt{5}z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ e $t_2 : \begin{cases} 4x - i\sqrt{5}z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

  $\mathcal{C}_2$ è un'ellisse in quanto sezione piana irriducibile di un cilindro ellittico ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ sia consideri la conica $\mathcal{C}_k$ di equazione cartesiana $kx^2 + 2xy + (k + 2)y^2 - 2y = 0$. Al variare del parametro reale k si determinino:

- i valori di k per i quali il punto $P = (1, -1)$ è il polo della retta $r : -3x + 1 = 0$ rispetto alla conica $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k = -2$ ______ **(pt.2)**

- i valori di k per i quali $\mathcal{C}_k$ risulta una parabola.

  Risposta $k = -1 \pm \sqrt{2}$ ______ **(pt.2)**

  Posto $k = -2$, si riconosca e si studi la conica $\mathcal{C}_{-2}$ determinandone, se esistono e sono reali, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi.

  Risposta Si tratta di un'iperbole di centro $C = (1, 2)$, asintoti: $x - y + 1 = 0$, $x = 1$ e assi: $(1 + \sqrt{2})x - y + (1 - \sqrt{2}) = 0$, $(1 - \sqrt{2})x - y + (1 + \sqrt{2}) = 0$. ______ **(pt.5)**

3

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II prova intermedia - 13.01.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati la retta $r : \begin{cases} 2x - ky = 0 \\ z = -k \end{cases}$ ed il piano $\pi : x + (k+1)y - 2z = 2$. Se ne determini la mutua posizione al variare del parametro reale k.

Risposta $k \neq \frac{-2}{3}$: incidenti; $k = \frac{-2}{3}$: paralleli e disgiunti **(pt.3)**

Posto $k = 1$, si determini una rappresentazione cartesiana della proiezione ortogonale di r su π.

Risposta $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + 2y - 2z = 2 \end{cases}$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini una rappresentazione cartesiana del piano, se esiste, che contiene le rette $r : \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ ed $s : \begin{cases} x = 0 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$.

Risposta $x + y - z = 1$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $h : \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ e $k : \begin{cases} 2x - z = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie Q generata da h nella rotazione di asse k.

  Risposta $7x^2 + y^2 + z^2 - 8xy - 8xz - 16yz = 0$ **(pt.5)**

- Si riconosca Q e se ne determinino gli eventuali punti multipli.

  Risposta Si tratta di un cono dotato di falda reale con vertice in $V = (0, 0, 0)$ che risulta essere il suo unico punto doppio. **(pt.2)**

- Le coniche $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, ottenute sezionando Q rispettivamente con i piani $\alpha : x + 2y = 0$ e $\beta : z = 1$ sono una riducibile e l'altra irriducibile.
  Si dica quale è la riducibile e se ne determinino le rette componenti.
  Si dica, motivando la risposta, se la sezione irriducibile è un'ellisse, un'iperbole o una parabola.

  Risposta $\mathcal{C}_1 = t_1 \bigcup t_2$ con $t_1 : \begin{cases} 3\sqrt{5}y + iz = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ e $t_2 : \begin{cases} 3\sqrt{5}y - iz = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$
  $\mathcal{C}_2$ è un'iperbole in quanto sezione piana irriducibile di un cilindro iperbolico **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ sia consideri la conica $\mathcal{C}_k$ di equazione cartesiana $3x^2 + 4xy + ky^2 + 4x + 6y = 0$. Al variare del parametro reale k si determinino:

- i valori di k per i quali il punto $P = (1, -1)$ è il polo della retta $r : 3x - 1 = 0$ rispetto alla conica $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k = 5$ **(pt.2)**

- i valori di k per i quali $\mathcal{C}_k$ risulta una parabola.

  Risposta $k = \frac{4}{3}$ **(pt.2)**

  Posto $k = 1$, si riconosca e si studi la conica $\mathcal{C}_1$ determinandone, se esistono e sono reali, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi.

  Risposta Si tratta di un'iperbole di centro $C = (-4, 5)$, asintoti: $x + y - 1 = 0$, $3x + y + 7 = 0$ e assi: $(\sqrt{5} - 1)x - 2y + 6 + 4\sqrt{5} = 0$ e $(1 + \sqrt{5})x + 2y - 6 + 4\sqrt{5} = 0$. **(pt.5)**

4

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II prova intermedia - 13.01.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati la retta $r : \begin{cases} x - z = k - 1 \\ x + ky = 4 \end{cases}$ ed il piano $\pi : x + ky + z = 4$. Se ne determini la mutua posizione al variare del parametro reale k.

Risposta $k \neq 0$: incidenti; $k = 0$: paralleli e disgiunti ______ **(pt.3)**

Posto $k = 1$, si determini una rappresentazione cartesiana della proiezione ortogonale di r su π.

Risposta $\begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini una rappresentazione cartesiana del piano, se esiste, che contiene le rette $r : \begin{cases} x - y = 2 \\ x - z = 2 \end{cases}$ ed $s : \begin{cases} 3x - y - z = 4 \\ x = 0 \end{cases}$.

Risposta $2x - y - z = 4$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $h : \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ e $k : \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie Q generata da h nella rotazione di asse k.

  Risposta $x^2 + 10y^2 + 10z^2 - 12xy - 12xz + 24yz = 0$ ______ **(pt.5)**

- Si riconosca Q e se ne determinino gli eventuali punti multipli.

  Risposta Si tratta di un cono dotato di falda reale con vertice in $V = (0, 0, 0)$ che risulta essere il suo unico punto doppio. ______ **(pt.2)**

- Le coniche $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, ottenute sezionando Q rispettivamente con i piani $\alpha : x - 2y = 0$ e $\beta : x = 1$ sono una riducibile e l'altra irriducibile.
  Si dica quale è la riducibile e se ne determinino le rette componenti.
  Si dica, motivando la risposta, se la sezione irriducibile è un'ellisse, un'iperbole o una parabola.

  Risposta $\mathcal{C}_1 = t_1 \bigcup t_2$ con $t_1 : \begin{cases} z + y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ e $t_2 : \begin{cases} z - y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

  $\mathcal{C}_2$ è un'iperbole in quanto sezione piana irriducibile di un cilindro iperbolico ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ sia consideri la conica $\mathcal{C}_k$ di equazione cartesiana $2kxy + (1 - k^2)y^2 - 8x + 4y + 16 = 0$. Al variare del parametro reale k si determinino:

- i valori di k per i quali il punto $P = (1, -2)$ è il polo della retta $r : -3x + 8 = 0$ rispetto alla conica $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k = -1/2$ ______ **(pt.2)**

- i valori di k per i quali $\mathcal{C}_k$ risulta una parabola.

  Risposta $k = 0$ ______ **(pt.2)**

  Posto $k = 2$, si riconosca e si studi la conica $\mathcal{C}_2$ determinandone, se esistono e sono reali, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi.

  Risposta Si tratta di un'iperbole di centro $C = (2, 2)$, asintoti: $4x - 3y - 2 = 0$, $y = 2$ e assi: $x - 2y + 2 = 0$, $2x + y - 6 = 0$. ______ **(pt.5)**

5

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II prova intermedia - 13.01.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati la retta $r : \begin{cases} x + 2z = 3 \\ x - y = k - 1 \end{cases}$ ed il piano $\pi : kx + y + kz = 3$. Se ne determini la mutua posizione al variare del parametro reale k.

Risposta $k \neq -2$: incidenti; $k = -2$: paralleli e disgiunti ______ **(pt.3)**

Posto $k = 1$, si determini una rappresentazione cartesiana della proiezione ortogonale di r su π.

Risposta $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini una rappresentazione cartesiana del piano, se esiste, che contiene le rette $r : \begin{cases} x - 2y = -1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ ed $s : \begin{cases} 2x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

Risposta $2x - y + z = 0$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $h : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ e $k : \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie Q generata da h nella rotazione di asse k.

  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 6xy - 6xz + 6yz = 0$ ______ **(pt.5)**

- Si riconosca Q e se ne determinino gli eventuali punti multipli.

  Risposta Si tratta di un cono dotato di falda reale con vertice in $V = (0, 0, 0)$ che risulta essere il suo unico punto doppio. ______ **(pt.2)**

- Le coniche $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, ottenute sezionando Q rispettivamente con i piani $\alpha : x - y = 0$ e $\beta : y = 2$ sono una riducibile e l'altra irriducibile.
  Si dica quale è la riducibile e se ne determinino le rette componenti.
  Si dica, motivando la risposta, se la sezione irriducibile è un'ellisse, un'iperbole o una parabola.

  Risposta $\mathcal{C}_1 = t_1 \bigcup t_2$ con $t_1 : \begin{cases} 2x - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ e $t_2 : \begin{cases} 2x + z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

  $\mathcal{C}_2$ è un'iperbole in quanto sezione piana irriducibile di un cilindro iperbolico ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ sia consideri la conica $\mathcal{C}_k$ di equazione cartesiana $kx^2 + 2xy + (k + 2)y^2 - 4y = 0$. Al variare del parametro reale k si determinino:

- i valori di k per i quali il punto $P = (1, -1)$ è il polo della retta $r : -2x + 1 = 0$ rispetto alla conica $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k = -3$ ______ **(pt.2)**

- i valori di k per i quali $\mathcal{C}_k$ risulta una parabola.

  Risposta $k = -1 \pm \sqrt{2}$ ______ **(pt.2)**

  Posto $k = -2$, si riconosca e si studi la conica $\mathcal{C}_{-2}$ determinandone, se esistono e sono reali, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi.

  Risposta Si tratta di un'iperbole di centro C=$(2, 4)$, asintoti: $x - y + 2 = 0$, $x = 2$ e assi: $(1 + \sqrt{2})x - y + 2(1 - \sqrt{2}) = 0$ e $(1 - \sqrt{2})x - y + 2(1 + \sqrt{2}) = 0$. ______ **(pt.5)**

6

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II prova intermedia - 13.01.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati la retta $r : \begin{cases} -kx + 2y = 0 \\ z = -k \end{cases}$ ed il piano $\pi : (k+1)x + y - 2z = 2$. Se ne determini la mutua posizione al variare del parametro reale k.

Risposta $k \neq \frac{-2}{3}$: incidenti; $k = \frac{-2}{3}$: paralleli e disgiunti **(pt.3)**

Posto $k = 1$, si determini una rappresentazione cartesiana della proiezione ortogonale di r su π.

Risposta $\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x + y - 2z = 2 \end{cases}$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini una rappresentazione cartesiana del piano, se esiste, che contiene le rette $r : \begin{cases} y - z = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ ed $s : \begin{cases} y = 0 \\ x + 3y - z = 1 \end{cases}$.

Risposta $x + y - z = 1$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $h : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ z - y = 0 \end{cases}$ e $k : \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie Q generata da h nella rotazione di asse k.

  Risposta $x^2 + y^2 + 7z^2 - 16xy - 8xz - 8yz = 0$ **(pt.5)**

- Si riconosca Q e se ne determinino gli eventuali punti multipli.

  Risposta Si tratta di un cono dotato di falda reale con vertice in $V = (0, 0, 0)$ che risulta essere il suo unico punto doppio. **(pt.2)**

- Le coniche $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, ottenute sezionando Q rispettivamente con i piani $\alpha : 2y + z = 0$ e $\beta : z = 1$ sono una riducibile e l'altra irriducibile.
  Si dica quale è la riducibile e se ne determinino le rette componenti.
  Si dica, motivando la risposta, se la sezione irriducibile è un'ellisse, un'iperbole o una parabola.

  Risposta $\mathcal{C}_1 = t_1 \bigcup t_2$ con $t_1 : \begin{cases} x + i3\sqrt{5}y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$ e $t_2 : \begin{cases} x - i3\sqrt{5}y = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$

  $\mathcal{C}_2$ è un'iperbole in quanto sezione piana irriducibile di un cilindro iperbolico **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ sia consideri la conica $\mathcal{C}_k$ di equazione cartesiana $3x^2 + 4xy + ky^2 + 4x + 2y = 0$. Al variare del parametro reale k si determinino:

- i valori di k per i quali il punto $P = (1, -1)$ è il polo della retta $r : 3x + 1 = 0$ rispetto alla conica $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k = 3$ **(pt.2)**

- i valori di k per i quali $\mathcal{C}_k$ risulta una parabola.

  Risposta $k = \frac{4}{3}$ **(pt.2)**

  Posto $k = 1$, si riconosca e si studi la conica $\mathcal{C}_1$ determinandone, se esistono e sono reali, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi.

  Risposta Si tratta di un'iperbole di centro $C = (0, -1)$, asintoti: $x + y + 1 = 0$, $3x + y + 1 = 0$ e assi: $(1 - \sqrt{5})x + 2y + 2 = 0$ e $(1 + \sqrt{5})x + 2y + 2 = 0$. **(pt.5)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II prova intermedia - 13.01.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati la retta $r: \begin{cases} x - z = k - 1 \\ x + ky = 7 \end{cases}$ ed il piano $\pi : x + ky + z = 7$. Se ne determini la mutua posizione al variare del parametro reale k.

Risposta $k \neq 0$: incidenti; $k = 0$: paralleli e disgiunti ______ **(pt.3)**

Posto $k = 1$, si determini una rappresentazione cartesiana della proiezione ortogonale di r su π.

Risposta $\begin{cases} x - z = 0 \\ x + y + z = 7 \end{cases}$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini una rappresentazione cartesiana del piano, se esiste, che contiene le rette $r: \begin{cases} x - y = 3 \\ x - z = 3 \end{cases}$ ed $s: \begin{cases} 3x - y - z = 6 \\ x = 0 \end{cases}$.

Risposta $2x - y - z = 6$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $h: \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ e $k: \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie Q generata da h nella rotazione di asse k.

  Risposta $x^2 + y^2 - 5z^2 + 4xy + 8xz - 8yz = 0$ ______ **(pt.5)**

- Si riconosca Q e se ne determinino gli eventuali punti multipli.

  Risposta Si tratta di un cono dotato di falda reale con vertice in $V = (0, 0, 0)$ che risulta essere il suo unico punto doppio. ______ **(pt.2)**

- Le coniche $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, ottenute sezionando Q rispettivamente con i piani $\alpha : x - 2z = 0$ e $\beta : x = 1$ sono una riducibile e l'altra irriducibile.
  Si dica quale è la riducibile e se ne determinino le rette componenti.
  Si dica, motivando la risposta, se la sezione irriducibile è un'ellisse, un'iperbole o una parabola.

  Risposta $\mathcal{C}_1 = t_1 \bigcup t_2$ con $t_1: \begin{cases} y - i\sqrt{15}z = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$ e $t_2: \begin{cases} y + i\sqrt{15}z = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$

  $\mathcal{C}_2$ è un'iperbole in quanto sezione piana irriducibile di un cilindro iperbolico ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ sia consideri la conica $\mathcal{C}_k$ di equazione cartesiana $2kxy + (1 - k^2)y^2 - 16x + 8y + 64 = 0$. Al variare del parametro reale k si determinino:

- i valori di k per i quali il punto $P = (1, -1)$ è il polo della retta $r : 59y + 52 = 0$ rispetto alla conica $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k = -8$ ______ **(pt.2)**

- i valori di k per i quali $\mathcal{C}_k$ risulta una parabola.

  Risposta $k = 0$ ______ **(pt.2)**

  Posto $k = 2$, si riconosca e si studi la conica $\mathcal{C}_2$ determinandone, se esistono e sono reali, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi.

  Risposta Si tratta di un'iperbole di centro $C = (4, 4)$, asintoti: $4x - 3y - 4 = 0$, $y = 4$ e assi: $x - 2y + 4 = 0$, $2x + y - 12 = 0$. ______ **(pt.5)**

8

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II prova intermedia - 13.01.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati la retta $r : \begin{cases} x - y = k - 1 \\ x + 2z = 4 \end{cases}$ ed il piano $\pi : kx + y + kz = 4$. Se ne determini la mutua posizione al variare del parametro reale k.

Risposta $k \neq -2$: incidenti; $k = -2$: paralleli e disgiunti **(pt.3)**

Posto $k = 1$, si determini una rappresentazione cartesiana della proiezione ortogonale di r su π.

Risposta $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini una rappresentazione cartesiana del piano, se esiste, che contiene le rette $r : \begin{cases} 2x - z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ ed $s : \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Risposta $x - y - 2z = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $h : \begin{cases} x + 2z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ e $k : \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie Q generata da h nella rotazione di asse k.

  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 6xy + 6xz - 6yz = 0$ **(pt.5)**

- Si riconosca Q e se ne determinino gli eventuali punti multipli.

  Risposta Si tratta di un cono dotato di falda reale con vertice in $V = (0, 0, 0)$ che risulta essere il suo unico punto doppio. **(pt.2)**

- Le coniche $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, ottenute sezionando Q rispettivamente con i piani $\alpha : x - y = 0$ e $\beta : y = 2$ sono una riducibile e l'altra irriducibile.
  Si dica quale è la riducibile e se ne determinino le rette componenti.
  Si dica, motivando la risposta, se la sezione irriducibile è un'ellisse, un'iperbole o una parabola.

  Risposta $\mathcal{C}_1 = t_1 \bigcup t_2$ con $t_1 : \begin{cases} z + 2x = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ e $t_2 : \begin{cases} z - 2x = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

  $\mathcal{C}_2$ è un'iperbole in quanto sezione piana irriducibile di un cilindro iperbolico **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ sia consideri la conica $\mathcal{C}_k$ di equazione cartesiana $kx^2 + 2xy + (k + 2)y^2 - 8y = 0$. Al variare del parametro reale k si determinino:

- i valori di k per i quali il punto $P = (1, -1)$ è il polo della retta $r : -3y + 2 = 0$ rispetto alla conica $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k = 1$ **(pt.2)**

- i valori di k per i quali $\mathcal{C}_k$ risulta una parabola.

  Risposta $k = -1 \pm \sqrt{2}$ **(pt.2)**

  Posto $k = -2$, si riconosca e si studi la conica $\mathcal{C}_{-2}$ determinandone, se esistono e sono reali, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi.

  Risposta Si tratta di un'iperbole di centro $C = (4, 8)$, asintoti: $x - y + 4 = 0$, $x = 4$ e assi: $(1 + \sqrt{2})x - y + 4(1 - \sqrt{2}) = 0$, $(1 - \sqrt{2})x - y + 4(1 + \sqrt{2}) = 0$. **(pt.5)**

9

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II prova intermedia - 13.01.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati la retta $r : \begin{cases} 2x + ky = 0 \\ z = -k \end{cases}$ ed il piano $\pi : x - (k+1)y - 2z = 3$. Se ne determini la mutua posizione al variare del parametro reale k.

Risposta $k \neq \frac{-2}{3}$: incidenti; $k = \frac{-2}{3}$: paralleli e disgiunti **(pt.3)**

Posto $k = 1$, si determini una rappresentazione cartesiana della proiezione ortogonale di r su π.

Risposta $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - 2y - 2z = 3 \end{cases}$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini una rappresentazione cartesiana del piano, se esiste, che contiene le rette $r : \begin{cases} z - x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ ed $s : \begin{cases} z = 0 \\ x - y - 3z = -1 \end{cases}$.

Risposta $x - y - z = -1$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $h : \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ e $k : \begin{cases} 2x - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$.

- Si determini un'equazione cartesiana della superficie Q generata da h nella rotazione di asse k.

  Risposta $7x^2 + y^2 + z^2 - 8xy - 8xz - 16yz = 0$ **(pt.5)**
- Si riconosca Q e se ne determinino gli eventuali punti multipli.

  Risposta Si tratta di un cono dotato di falda reale con vertice in $V = (0, 0, 0)$ che risulta essere il suo unico punto doppio. **(pt.2)**
- Le coniche $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, ottenute sezionando Q rispettivamente con i piani $\alpha : y + z = 0$ e $\beta : y = 1$ sono una riducibile e l'altra irriducibile.
  Si dica quale è la riducibile e se ne determinino le rette componenti.
  Si dica, motivando la risposta, se la sezione irriducibile è un'ellisse, un'iperbole o una parabola.

  Risposta $\mathcal{C}_1 = t_1 \bigcup t_2$ con $t_1 : \begin{cases} \sqrt{7}x + i3\sqrt{2}y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ e $t_2 : \begin{cases} \sqrt{7}x - i3\sqrt{2}y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$
  $\mathcal{C}_2$ è un'iperbole in quanto sezione piana irriducibile di un cilindro iperbolico **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ sia consideri la conica $\mathcal{C}_k$ di equazione cartesiana $3x^2 + 4xy + ky^2 + 2x + 4y = 0$. Al variare del parametro reale k si determinino:

- i valori di k per i quali il punto $P = (1, -1)$ è il polo della retta $r : 2x - 1 = 0$ rispetto alla conica $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k = 4$ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali $\mathcal{C}_k$ risulta una parabola.

  Risposta $k = \frac{4}{3}$ **(pt.2)**

  Posto $k = 1$, si riconosca e si studi la conica $\mathcal{C}_1$ determinandone, se esistono e sono reali, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi.

  Risposta Si tratta di un'iperbole di centro $C = (-3, 4)$, asintoti: $x + y - 1 = 0$, $3x + y + 5 = 0$ e assi: $(\sqrt{5} - 1)x - 2y + 5 + 3\sqrt{5} = 0$ e $(1 + \sqrt{5})x + 2y - 5 + 3\sqrt{5} = 0$. **(pt.5)**