

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 2° appello - 28/01/2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2k-3 \\ 3 & 1 & k \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ k-1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_k X = B_k$ precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile.

Risposta Compatibile per $k \neq 2$; $k \neq 1, 2$ soluzione unica, $k = 1$ ∞^1 soluzioni _____ (pt.3)

- interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro reale k .

Risposta $k \neq 1, 2$ i piani, tutti distinti, hanno esattamente un punto in comune, $k = 1$ i piani, tutti distinti, appartengono a un fascio proprio, $k = 2$ i piani sono a due a due incidenti in rette parallele fra loro _____ (pt.3)

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Si determinino, se possibile, una matrice D diagonale simile ad A e una corrispondente matrice diagonalizzante P ;

Risposta $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ _____ (pt.3)

- si determini, se possibile, una base ortonormale di \mathbb{R}^4 costituita da autovettori di A .

Risposta $\mathcal{B} = ((0, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (1, 0, 0, 0), (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0, -1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}))$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ si considerino i due sottospazi $U_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k+2 & 0 \\ k & k-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ e

$W_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$ le dimensioni di U_k e W_k ;

Risposta $\dim U_k = 2 \quad \forall k \in \mathbb{R}$, $k = 2 \quad \dim W_k = 1$, $k \neq 2 \quad \dim W_k = 2$ _____ (pt.2)

- si determinino i valori di k per cui la somma $U_k + W_k$ è diretta;

Risposta $k \neq 0$ _____ (pt.2)

- posto $k = -1$ si determini un complemento diretto di W_{-1} .

Risposta $W'_{-1} = U_{-1}$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 4. In $E_2(\mathbb{R})$ si determinino le coordinate del punto P' simmetrico di $P = (1, -3)$ rispetto alla retta $r : x + 4y + 2 = 0$ nella direzione $[(1, 2)]$.

Risposta $P' = (3, 1)$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k : x^2 + 2kxy + (k+1)y^2 - kx = 0$, dove k è un parametro reale. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:

- la conica \mathcal{C}_k è generale;

Risposta $k \neq -1, 0$ _____ (pt.1)

- la conica \mathcal{C}_k ha come centro il punto $C = [(2, -1, 2)]$;

Risposta $k = 1$ _____ (pt.2)

- la conica \mathcal{C}_k ammette come asintoto la retta $a : x + 3y - 3 = 0$.

Risposta $k = 2$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 6. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana del luogo \mathcal{Q} delle rette che proiettano dal punto $V_\infty = [(1, 0, -1, 0)]$ i punti della curva $\mathcal{C} : x^2 + 2y^2 - 4xy + 2z - 3 = 0 = x + y$.

Risposta $7y^2 + 2x + 2y + 2z - 3 = 0$ _____ (pt.3)

Si determinino, motivando la scelta, un piano α che sezioni la quadrica \mathcal{Q} secondo una conica riducibile e un piano β che sezioni \mathcal{Q} secondo una conica irriducibile.

Risposta $\alpha : y = 0 \quad (V_\infty \in \alpha)$, $\beta : x + y = 0 \quad (V_\infty \notin \beta)$ _____ (pt.2)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 2° appello - 28/01/2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2k-4 & 1 & -1 \\ k-1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_k X = B_k$ precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile.

Risposta Compatibile per $k \neq 2, 3$; soluzione unica. _____ (pt.3)

- interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro reale k .

Risposta $k \neq 2, 3$ i piani, tutti distinti, hanno esattamente un punto in comune; $k = 3$ i piani α e β sono paralleli, γ è ad essi incidente; $k = 2$ i piani sono a due a due incidenti in rette parallele fra loro _____ (pt.3)

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- Si determinino, se possibile, una matrice D diagonale simile ad A e una corrispondente matrice diagonalizzante P ;

Risposta $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ _____ (pt.3)

- si determini, se possibile, una base ortonormale di \mathbb{R}^4 costituita da autovettori di A .

Risposta $\mathcal{B} = ((0, 0, 0, 1), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0), (-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 0), (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 0))$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ si considerino i due sottospazi $U_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k & 0 \\ k-2 & k-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$ e

$W_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k-2 & 0 \\ 0 & k-5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k-1 & 1 \end{pmatrix}\right)$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$ le dimensioni di U_k e W_k ;

Risposta $k = 2$ $\dim U_k = 1$, $k \neq 2$ $\dim U_k = 2$, $\dim W_k = 2 \quad \forall k \in \mathbb{R}$ _____ (pt.2)

- si determinino i valori di k per cui la somma $U_k + W_k$ è diretta;

Risposta $k \neq 4$ _____ (pt.2)

- posto $k = 1$ si determini un complemento diretto di W_1 .

Risposta $W'_1 = U_1$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 4. In $E_2(\mathbb{R})$ si determinino le coordinate del punto P' simmetrico di $P = (-3, -2)$ rispetto alla retta $r : x + 4y + 2 = 0$ nella direzione $[(1, 2)]$.

Risposta $P' = (-1, 2)$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k : 2x^2 + 2kxy + (k+2)y^2 - kx = 0$, dove k è un parametro reale. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:

- la conica \mathcal{C}_k è generale;

Risposta $k \neq -2, 0$ _____ (pt.1)

- la conica \mathcal{C}_k ha come centro il punto $C = [(2, -1, 2)]$;

Risposta $k = 2$ _____ (pt.2)

- la conica \mathcal{C}_k ammette come asintoto la retta $a : x + 3y - 3 = 0$.

Risposta $k = 4$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 6. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana del luogo \mathcal{Q} delle rette che proiettano dal punto $V = (1, 0, 0)$ i punti della curva $\mathcal{C} : x^2 + 2y^2 - 4xy + 2z = 0 = x + y$.

Risposta $7y^2 - 2xz - 2yz + 2z = 0$ _____ (pt.3)

Si determinino, motivando la scelta, un piano α che sezioni la quadrica \mathcal{Q} secondo una conica riducibile e un piano β che sezioni \mathcal{Q} secondo una conica irriducibile.

Risposta $\alpha : x = 1 \quad (V \in \alpha)$, $\beta : x + y = 0 \quad (V \notin \beta)$ _____ (pt.2)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 2° appello - 28/01/2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k+2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2k+1 \\ 3 & 1 & k+2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ k+1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_k X = B_k$ precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile.

Risposta Compatibile per $k \neq 0$; $k \neq -1, 0$ soluzione unica, $k = -1$ ∞^1 soluzioni _____ (pt.3)

- interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro reale k .

Risposta $k \neq -1, 0$ i piani, tutti distinti, hanno esattamente un punto in comune, $k = -1$ i piani, tutti distinti, appartengono a un fascio proprio, $k = 0$ i piani sono a due a due incidenti in rette parallele fra loro _____ (pt.3)

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Si determinino, se possibile, una matrice D diagonale simile ad A e una corrispondente matrice diagonalizzante P ;

Risposta $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ _____ (pt.3)

- si determini, se possibile, una base ortonormale di \mathbb{R}^4 costituita da autovettori di A .

Risposta $\mathcal{B} = ((1, 0, 0, 0), (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0, -1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}), (0, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}))$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ si considerino i due sottospazi $U_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k+1 & 0 \\ k-1 & k-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix}\right)$ e

$W_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k-1 & 0 \\ 0 & k-4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$ le dimensioni di U_k e W_k ;

Risposta $\dim U_k = 2 \quad \forall k \in \mathbb{R}$, $k = 3 \quad \dim W_k = 1$, $k \neq 3 \quad \dim W_k = 2$ _____ (pt.2)

- si determinino i valori di k per cui la somma $U_k + W_k$ è diretta;

Risposta $k \neq 1$ _____ (pt.2)

- posto $k = 2$ si determini un complemento diretto di W_2 .

Risposta $W'_2 = U_2$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 4. In $E_2(\mathbb{R})$ si determinino le coordinate del punto P' simmetrico di $P = (5, -4)$ rispetto alla retta $r: x + 4y + 2 = 0$ nella direzione $[(1, 2)]$.

Risposta $P' = (7, 0)$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k: x^2 + 2(k-2)xy + (k-1)y^2 - (k-2)x = 0$, dove k è un parametro reale. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:

- la conica \mathcal{C}_k è generale;

Risposta $k \neq 1, 2$ _____ (pt.1)

- la conica \mathcal{C}_k ha come centro il punto $C = [(2, -1, 2)]$;

Risposta $k = 3$ _____ (pt.2)

- la conica \mathcal{C}_k ammette come asintoto la retta $a: x + 3y - 3 = 0$.

Risposta $k = 4$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 6. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana del luogo \mathcal{Q} delle rette che proiettano dal punto $V_\infty = [(1, 0, 1, 0)]$ i punti della curva $\mathcal{C}: x^2 + 2y^2 - 4xy + 2z - 3 = 0 = x + y$.

Risposta $7y^2 - 2x - 2y + 2z - 3 = 0$ _____ (pt.3)

Si determinino, motivando la scelta, un piano α che sezioni la quadrica \mathcal{Q} secondo una conica riducibile e un piano β che sezioni \mathcal{Q} secondo una conica irriducibile.

Risposta $\alpha: y = 0$ ($V_\infty \in \alpha$), $\beta: x + y = 0$ ($V_\infty \notin \beta$) _____ (pt.2)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 2° appello - 28/01/2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2k & 1 & -1 \\ k+1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & k \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_k X = B_k$ precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile.

Risposta Compatibile per $k \neq 0, 1$; soluzione unica. _____ (pt.3)

- interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro reale k .

Risposta $k \neq 0, 1$ i piani, tutti distinti, hanno esattamente un punto in comune; $k = 1$ i piani α e β sono paralleli, γ è ad essi incidente; $k = 0$ i piani sono a due a due incidenti in rette parallele fra loro _____ (pt.3)

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Si determinino, se possibile, una matrice D diagonale simile ad A e una corrispondente matrice diagonalizzante P ;

Risposta $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ _____ (pt.3)

- si determini, se possibile, una base ortonormale di \mathbb{R}^4 costituita da autovettori di A .

Risposta $\mathcal{B} = ((0, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (1, 0, 0, 0), (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0, -1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}))$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ si considerino i due sottospazi $U_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k-3 & 0 \\ k-1 & k-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$ e

$W_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k-1 & 0 \\ 0 & k-4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix}\right)$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$ le dimensioni di U_k e W_k ;

Risposta $k = 1$ $\dim U_k = 1$, $k \neq 1$ $\dim U_k = 2$, $\dim W_k = 2 \quad \forall k \in \mathbb{R}$ _____ (pt.2)

- si determinino i valori di k per cui la somma $U_k + W_k$ è diretta;

Risposta $k \neq 7$ _____ (pt.2)

- posto $k = 2$ si determini un complemento diretto di W_2 .

Risposta $W'_2 = U_2$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 4. In $E_2(\mathbb{R})$ si determinino le coordinate del punto P' simmetrico di $P = (3, 1)$ rispetto alla retta $r : x + 4y + 2 = 0$ nella direzione $[(1, 2)]$.

Risposta $P' = (1, -3)$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k : x^2 + 2(k+2)xy + (k+3)y^2 - (k+2)x = 0$, dove k è un parametro reale. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:

- la conica \mathcal{C}_k è generale;

Risposta $k \neq -3, -2$ _____ (pt.1)

- la conica \mathcal{C}_k ha come centro il punto $C = [(2, -1, 2)]$;

Risposta $k = -1$ _____ (pt.2)

- la conica \mathcal{C}_k ammette come asintoto la retta $a : x + 3y - 3 = 0$.

Risposta $k = 0$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 6. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana del luogo \mathcal{Q} delle rette che proiettano dal punto $V = (0, 1, 0)$ i punti della curva $\mathcal{C} : x^2 + 2y^2 - 4xy + 2z = 0 = x + y$.

Risposta $7x^2 - 2xz - 2yz + 2z = 0$ _____ (pt.3)

Si determinino, motivando la scelta, un piano α che sezioni la quadrica \mathcal{Q} secondo una conica riducibile e un piano β che sezioni \mathcal{Q} secondo una conica irriducibile.

Risposta $\alpha : y = 1 \quad (V \in \alpha), \quad \beta : x + y = 0 \quad (V \notin \beta)$ _____ (pt.2)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 2° appello - 28/01/2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k-2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2k-7 \\ 3 & 1 & k-2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ k-3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_k X = B_k$ precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile.

Risposta Compatibile per $k \neq 4$; $k \neq 3, 4$ soluzione unica, $k = 3$ ∞^1 soluzioni _____ (pt.3)

- interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro reale k .

Risposta $k \neq 3, 4$ i piani, tutti distinti, hanno esattamente un punto in comune, $k = 3$ i piani, tutti distinti, appartengono a un fascio proprio, $k = 4$ i piani sono a due a due incidenti in rette parallele fra loro _____ (pt.3)

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- Si determinino, se possibile, una matrice D diagonale simile ad A e una corrispondente matrice diagonalizzante P ;

Risposta $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ _____ (pt.3)

- si determini, se possibile, una base ortonormale di \mathbb{R}^4 costituita da autovettori di A .

Risposta $\mathcal{B} = ((0, 0, 0, 1), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0), (-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}, 0), (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 0))$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ si considerino i due sottospazi $U_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k+3 & 0 \\ k+1 & k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k+2 & 1 \end{pmatrix}\right)$ e

$W_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k+1 & 0 \\ 0 & k-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$ le dimensioni di U_k e W_k ;

Risposta $\dim U_k = 2 \quad \forall k \in \mathbb{R}$, $k = 1 \quad \dim W_k = 1$, $k \neq 1 \quad \dim W_k = 2$ _____ (pt.2)

- si determinino i valori di k per cui la somma $U_k + W_k$ è diretta;

Risposta $k \neq -1$ _____ (pt.2)

- posto $k = 2$ si determini un complemento diretto di W_2 .

Risposta $W'_2 = U_2$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 4. In $E_2(\mathbb{R})$ si determinino le coordinate del punto P' simmetrico di $P = (-1, 2)$ rispetto alla retta $r : x + 4y + 2 = 0$ nella direzione $[(1, 2)]$.

Risposta $P' = (-3, -2)$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k : x^2 + 2(k-1)xy + ky^2 - (k-1)x = 0$, dove k è un parametro reale. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:

- la conica \mathcal{C}_k è generale;

Risposta $k \neq 0, 1$ _____ (pt.1)

- la conica \mathcal{C}_k ha come centro il punto $C = [(2, -1, 2)]$;

Risposta $k = 2$ _____ (pt.2)

- la conica \mathcal{C}_k ammette come asintoto la retta $a : x + 3y - 3 = 0$.

Risposta $k = 3$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 6. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana del luogo \mathcal{Q} delle rette che proiettano dal punto $V_\infty = [(0, -1, 1, 0)]$ i punti della curva $\mathcal{C} : x^2 + 2y^2 - 4xy + 2z - 3 = 0 = x + y - 1$.

Risposta $7x^2 - 6x + 2y + 2z - 3 = 0$ _____ (pt.3)

Si determinino, motivando la scelta, un piano α che sezioni la quadrica \mathcal{Q} secondo una conica riducibile e un piano β che sezioni \mathcal{Q} secondo una conica irriducibile.

Risposta $\alpha : x = 0 \quad (V_\infty \in \alpha)$, $\beta : x + y = 1 \quad (V_\infty \notin \beta)$ _____ (pt.2)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 2° appello - 28/01/2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2k+4 & 1 & -1 \\ k+3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & k+2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k+2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la risolubilità del sistema $A_k X = B_k$ precisando il numero delle soluzioni quando il sistema risulta compatibile.

Risposta Compatibile per $k \neq -2, -1$; soluzione unica. _____ (pt.3)

- interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro reale k .

Risposta $k \neq -2, -1$ i piani, tutti distinti, hanno esattamente un punto in comune; $k = -1$ i piani α e β sono paralleli, γ è ad essi incidente; $k = -2$ i piani sono a due a due incidenti in rette parallele fra loro (pt.3)

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

- Si determinino, se possibile, una matrice D diagonale simile ad A e una corrispondente matrice diagonalizzante P ;

Risposta $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ _____ (pt.3)

- si determini, se possibile, una base ortonormale di \mathbb{R}^4 costituita da autovettori di A .

Risposta $\mathcal{B} = ((1, 0, 0, 0), (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0, -1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}), (0, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}))$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ si considerino i due sottospazi $U_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k+2 & 0 \\ k & k+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ e

$W_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix}\right)$, dove k è un parametro reale.

- Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$ le dimensioni di U_k e W_k ;

Risposta $k = 0$ $\dim U_k = 1$, $k \neq 0$ $\dim U_k = 2$, $\dim W_k = 2 \quad \forall k \in \mathbb{R}$ _____ (pt.2)

- si determinino i valori di k per cui la somma $U_k + W_k$ è diretta;

Risposta $k \neq 6$ _____ (pt.2)

- posto $k = -1$ si determini un complemento diretto di W_{-1} .

Risposta $W'_{-1} = U_{-1}$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 4. In $E_2(\mathbb{R})$ si determinino le coordinate del punto P' simmetrico di $P = (7, 0)$ rispetto alla retta $r : x + 4y + 2 = 0$ nella direzione $[(1, 2)]$.

Risposta $P' = (5, -4)$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k : x^2 + 2(k+1)xy + (k+2)y^2 - (k+1)x = 0$, dove k è un parametro reale. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:

- la conica \mathcal{C}_k è generale;

Risposta $k \neq -2, -1$ _____ (pt.1)

- la conica \mathcal{C}_k ha come centro il punto $C = [(2, -1, 2)]$;

Risposta $k = 0$ _____ (pt.2)

- la conica \mathcal{C}_k ammette come asintoto la retta $a : x + 3y - 3 = 0$.

Risposta $k = 1$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 6. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana del luogo \mathcal{Q} delle rette che proiettano dal punto $V = (-1, 0, 0)$ i punti della curva $\mathcal{C} : x^2 + 2y^2 - 4xy + 2z = 0 = x + y$.

Risposta $7y^2 + 2xz + 2yz + 2z = 0$ _____ (pt.3)

Si determinino, motivando la scelta, un piano α che sezioni la quadrica \mathcal{Q} secondo una conica riducibile e un piano β che sezioni \mathcal{Q} secondo una conica irriducibile.

Risposta $\alpha : x = -1$ ($V \in \alpha$), $\beta : x + y = 0$ ($V \notin \beta$) _____ (pt.2)