A

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 31/10/2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & k & 1 & 1 \\ k & 0 & 1-k & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- i valori di k, se esistono, per i quali il sistema $A_k X = B$ ammette autosoluzioni;

Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ esistono autosoluzioni **(pt.2)**

- per ciascuno di tali valori, lo spazio S_k delle soluzioni e la sua dimensione;

Risposta $k \neq 1$ $S_k = \mathcal{L}((1-k, 1, -k, 2(k-1)))$, $\dim S_k = 1$
$S_1 = \mathcal{L}((0,0,1,-1),(0,1,0,-1))$, $\dim S_1 = 2$ **(pt.3)**

Posto $k = 1$

- si determinino in S_1 una base B e una base B' ottenuta ortonormalizzando B rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$;

Risposta $B = ((0,0,1,-1),(0,1,0,-1))$, $B' = (\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1), \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(0,1,-1/2,-1/2))$ **(pt.3)**

- si determinino le componenti di $v = (0, -112, 70, 42)$ rispetto alla base ortonormale B' di S_1.

Risposta $(14\sqrt{2}, -56\sqrt{6})$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & k-2 \\ k-2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k-2 & 1 \end{pmatrix}\right)$ e $W_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & k-1 \\ k-1 & 1 \end{pmatrix}\right)$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- le dimensioni di U_k e di W_k;

Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ $\dim U = \dim W = 2$ **(pt.2)**

- le dimensioni di $U_k + W_k$ e di $U_k \bigcap W_k$;

Risposta $k \neq 2,3$ $\dim U_k + W_k = 4$ e $\dim U_k \bigcap W_k = 0$; $k = 2,3$ $\dim U_k + W_k = 3$ e $\dim U_k \bigcap W_k = 1$ **(pt.3)**

- i valori di k, se esistono, per i quali la somma $U_k + W_k$ è diretta.

Risposta $k \neq 2,3$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sono date le matrici $A = \begin{pmatrix} -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 5/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$ e $B_h = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & h \end{pmatrix}$.
Si dica, motivando la risposta, se la matrice A è invertibile e, in tal caso, si determinino, se esistono, i valori di h per i quali B_h è l'inversa di A.
Risposta A è invertibile perchè $|A| \neq 0$ e $A^{-1} = B_h$ per $h = 4$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 9 & k & 0 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile;

Risposta $k \neq 0$ **(pt.5)**

- posto $k = 6$, una matrice D diagonale simile ad A_6 e la relativa matrice diagonalizzante P.

Risposta $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

- Si dica, motivando la risposta, se la matrice A_6 risulta ortogonalmente diagonalizzabile.

Risposta Non lo è perchè, pur essendo reale, non è simmetrica. **(pt.2)**

B

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 31/10/2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ k-1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k-3 & k \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- i valori di k, se esistono, per i quali il sistema $A_k X = B$ ammette autosoluzioni;

Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ esistono autosoluzioni **(pt.2)**

- per ciascuno di tali valori, lo spazio S_k delle soluzioni e la sua dimensione;

Risposta $k \neq 3$ $S_k = \mathcal{L}((0, k+3, -k, k-3))$, $\dim S_k = 1$
$S_3 = \mathcal{L}((1, -2, 0, 0), (0, -2, 1, 0))$, $\dim S_3 = 2$ **(pt.3)**

Posto $k = 3$

- si determinino in S_3 una base B e una base B' ottenuta ortonormalizzando B rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$;

Risposta $B = ((1, -2, 0, 0), (0, -2, 1, 0))$, $B' = (\frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2, 0, 0), \frac{\sqrt{5}}{3}(-4/5, -2/5, 1, 0))$ **(pt.3)**

- si determinino le componenti di $v = (64, -218, 45, 0)$ rispetto alla base ortonormale B' di S_3.

Risposta $(100\sqrt{5}, 27\sqrt{5})$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 4 & k+2 \\ 2k & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & k-2 \\ k-2 & 1 \end{pmatrix}\right)$ e $W_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 3 & 2k \\ 2k & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- le dimensioni di U_k e di W_k;

Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ $\dim U_k = 2$; $k = 0 : \dim W_0 = 1$; $k \neq 0 : \dim W_k = 2$ **(pt.2)**

- le dimensioni di $U_k + W_k$ e di $U_k \bigcap W_k$;

Risposta $k \neq 0, 2$ $\dim U_k + W_k = 4$ e $\dim U_k \bigcap W_k = 0$; $k = 0$ $\dim U_0 + W_0 = 3$ e $\dim U_0 \bigcap W_0 = 0$; $k = 2$ $\dim U_2 + W_2 = 3$ e $\dim U_2 \bigcap W_2 = 1$ **(pt.3)**

- i valori di k, se esistono, per i quali la somma $U_k + W_k$ è diretta.

Risposta $k \neq 2$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sono date le matrici $A = \begin{pmatrix} -1/3 & -3/5 & 2/5 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$ e $B_h = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & h \end{pmatrix}$.
Si dica, motivando la risposta, se la matrice A è invertibile e, in tal caso, si determinino, se esistono, i valori di h per i quali B_h è l'inversa di A.
Risposta A è invertibile perchè $|A| \neq 0$ e $A^{-1} = B_h$ per $h = 3$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 25 & k & 0 \\ 5 & 1 & 10 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile;

Risposta $k \neq 5$ **(pt.5)**

- posto $k = 15$, una matrice D diagonale simile ad A_{15} e la relativa matrice diagonalizzante P.

Risposta $D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

- Si dica, motivando la risposta, se la matrice A_{15} risulta ortogonalmente diagonalizzabile.

Risposta Non lo è perchè, pur essendo reale, non è simmetrica. **(pt.2)**

C

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 31/10/2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1-k & k \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- i valori di k, se esistono, per i quali il sistema $A_k X = B$ ammette autosoluzioni;

  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ esistono autosoluzioni **(pt.2)**

- per ciascuno di tali valori, lo spazio S_k delle soluzioni e la sua dimensione;

  Risposta $k \neq 1$ $S_k = \mathcal{L}((1, 2(k-1), -k, 1-k))$, $\dim S_k = 1$
  $S_1 = \mathcal{L}((0,-1,1,0),(1,-1,0,0))$, $\dim S_1 = 2$ **(pt.3)**

Posto $k = 1$

- si determinino in S_1 una base B e una base B' ottenuta ortonormalizzando B rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$;

  Risposta $B = ((0,-1,1,0),(1,-1,0,0))$, $B' = (\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1,0), \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(1,-1/2,-1/2,0))$ **(pt.3)**

- si determinino le componenti di $v = (-448, 164, 284, 0)$ rispetto alla base ortonormale B' di S_1.

  Risposta $(60\sqrt{2}, -224\sqrt{6})$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & k+2 \\ k+2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k+2 & 1 \end{pmatrix}\right)$ e $W_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & k+3 \\ k+3 & 1 \end{pmatrix}\right)$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- le dimensioni di U_k e di W_k;

  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ $\dim U$=$\dim W = 2$ **(pt.2)**

- le dimensioni di $U_k + W_k$ e di $U_k \bigcap W_k$;

  Risposta $k \neq -1, -2$ $\dim U_k + W_k = 4$ e $\dim U_k \bigcap W_k = 0$; $k = -1, -2$ $\dim U_k + W_k = 3$ e $\dim U_k \bigcap W_k = 1$ **(pt.3)**

- i valori di k, se esistono, per i quali la somma $U_k + W_k$ è diretta.

  Risposta $k \neq -1, -2$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $M_3(\mathbb{R})$ sono date le matrici $A = \begin{pmatrix} 8/3 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 13/6 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ e $B_h = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & -5 & 2 \\ 1 & -8 & h \end{pmatrix}$.
Si dica, motivando la risposta, se la matrice A è invertibile e, in tal caso, si determinino, se esistono, i valori di h per i quali B_h è l'inversa di A.
Risposta A è invertibile perchè $|A| \neq 0$ e $A^{-1} = B_h$ per $h = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 16 & k & 0 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 0$ **(pt.5)**

- posto $k = 8$, una matrice D diagonale simile ad A_8 e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

- Si dica, motivando la risposta, se la matrice A_8 risulta ortogonalmente diagonalizzabile.

  Risposta Non lo è perchè, pur essendo reale, non è simmetrica. **(pt.2)**

D

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1° test - 31/10/2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 2 & 1 \\ 1-k & 0 & k & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- i valori di k, se esistono, per i quali il sistema $A_k X = B$ ammette autosoluzioni;

  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ esistono autosoluzioni **(pt.2)**

- per ciascuno di tali valori, lo spazio S_k delle soluzioni e la sua dimensione;

  Risposta $k \neq 1 \quad S_k = \mathcal{L}((-k, 1, 1-k, 2(k-1)))$, $\dim S_k = 1$
  $S_1 = \mathcal{L}((1,0,0,-1),(0,1,0,-1))$, $\dim S_1 = 2$ **(pt.3)**

Posto $k = 1$

- si determinino in S_1 una base B e una base B' ottenuta ortonormalizzando B rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$;

  Risposta $B = ((1,0,0,-1),(0,1,0,-1))$, $B' = (\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,-1), \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(-1/2,1,0,-1/2))$ **(pt.3)**

- si determinino le componenti di $v = (350, -560, 0, 210)$ rispetto alla base ortonormale B' di S_1.

  Risposta $\left(70\sqrt{2}, -280\sqrt{6}\right)$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix}\right)$ e

$W_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ k+1 & 1 \end{pmatrix}\right)$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- le dimensioni di U_k e di W_k;

  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ $\dim U_k = \dim W_k = 2$ **(pt.2)**

- le dimensioni di $U_k + W_k$ e di $U_k \bigcap W_k$;

  Risposta $k \neq 0, 1$ $\dim U_k + W_k = 4$ e $\dim U_k \bigcap W_k = 0$; $k = 0, 1$ $\dim U_k + W_k = 3$ e $\dim U_k \bigcap W_k = 1$ **(pt.3)**

- i valori di k, se esistono, per i quali la somma $U_k + W_k$ è diretta.

  Risposta $k \neq 0, 1$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sono date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 5/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ e $B_h = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & h \end{pmatrix}$.

Si dica, motivando la risposta, se la matrice A è invertibile e, in tal caso, si determinino, se esistono, i valori di h per i quali B_h è l'inversa di A.

Risposta A è invertibile perchè $|A| \neq 0$ e $A^{-1} = B_h$ per $h = 1$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 4 & k & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 0$ **(pt.5)**

- posto $k = 4$, una matrice D diagonale simile ad A_4 e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

- Si dica, motivando la risposta, se la matrice A_4 risulta ortogonalmente diagonalizzabile.

  Risposta Non lo è perchè, pur essendo reale, non è simmetrica. **(pt.2)**

E

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 31/10/2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & k-1 & 1 \\ k-3 & k & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- i valori di k, se esistono, per i quali il sistema $A_k X = B$ ammette autosoluzioni;

  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ esistono autosoluzioni **(pt.2)**

- per ciascuno di tali valori, lo spazio S_k delle soluzioni e la sua dimensione;

  Risposta $k \neq 3 \quad S_k = \mathcal{L}((-k, k-3, 0, k+3)), \quad \dim S_k = 1$
  $S_3 = \mathcal{L}((0,0,1,-2),(1,0,0,-2)), \quad \dim S_3 = 2$ **(pt.3)**

Posto $k = 3$

- si determinino in S_3 una base B e una base B' ottenuta ortonormalizzando B rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$;

  Risposta $B = ((0,0,1,-2),(1,0,0,-2)), \quad B' = (\frac{1}{\sqrt{5}}(0,0,1,-2), \frac{\sqrt{5}}{3}(1,0,-4/5,-2/5))$ **(pt.3)**

- si determinino le componenti di $v = (-30, 0, 80, -100)$ rispetto alla base ortonormale B' di S_3.

  Risposta $(56\sqrt{5}, -18\sqrt{5})$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 4 & k+4 \\ 2k+4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}\right)$ e $W_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 3 & 2k+4 \\ 2k+4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- le dimensioni di U_k e di W_k;

  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ $\dim U_k = 2$; $k = -2 : \dim W_{-2} = 1$; $k \neq -2 : \dim W_k = 2$ **(pt.2)**

- le dimensioni di $U_k + W_k$ e di $U_k \bigcap W_k$;

  Risposta $k \neq -2, 0$ $\dim U_k + W_k = 4$ e $\dim U_k \bigcap W_k = 0$; $k = -2$ $\dim U_{-2} + W_{-2} = 3$ e $\dim U_{-2} \bigcap W_{-2} = 0$;
  $k = 0$ $\dim U_0 + W_0 = 3$ e $\dim U_0 \bigcap W_0 = 1$ **(pt.3)**

- i valori di k, se esistono, per i quali la somma $U_k + W_k$ è diretta.

  Risposta $k \neq 0$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sono date le matrici $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 13/3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B_h = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & -5 & 2 \\ 1 & -8 & h \end{pmatrix}$.

Si dica, motivando la risposta, se la matrice A è invertibile e, in tal caso, si determinino, se esistono, i valori di h per i quali B_h è l'inversa di A.

Risposta A è invertibile perchè $|A| \neq 0$ e $A^{-1} = B_h$ per $h = -1$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 3$ **(pt.5)**

- posto $k = 5$, una matrice D diagonale simile ad A_5 e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

- Si dica, motivando la risposta, se la matrice A_5 risulta ortogonalmente diagonalizzabile.

  Risposta Non lo è perchè, pur essendo reale, non è simmetrica. **(pt.2)**

F

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 31/10/2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & k-2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- i valori di k, se esistono, per i quali il sistema $A_k X = B$ ammette autosoluzioni;

  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ esistono autosoluzioni **(pt.2)**

- per ciascuno di tali valori, lo spazio S_k delle soluzioni e la sua dimensione;

  Risposta $k \neq 2$ $\quad S_k = \mathcal{L}((2, 1-k, k-2, -1))$, $\quad \dim S_k = 1$
  $S_2 = \mathcal{L}((0,-1,0,1),(1,-1,0,0))$, $\quad \dim S_2 = 2$ **(pt.3)**

Posto $k = 2$

- si determinino in S_2 una base B e una base B' ottenuta ortonormalizzando B rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$;

  Risposta $B = ((0,-1,0,1),(1,-1,0,0))$, $\quad B' = (\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,0,1), \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(1,-1/2,0,-1/2))$ **(pt.3)**

- si determinino le componenti di $v = (48, -76, 0, 28)$ rispetto alla base ortonormale B' di S_2.

  Risposta $(52\sqrt{2}, 24\sqrt{6})$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4-2k \\ k-2 & 0 \end{pmatrix}\right)$ e $W_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 & k+1 \\ k-2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2-k \\ 2-k & 1 \end{pmatrix}\right)$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- le dimensioni di U_k e di W_k;

  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ $\dim W_k = 2$; $\; k = 2 : \dim U_2 = 1$; $\; k \neq 2 : \dim U_k = 2$ **(pt.2)**

- le dimensioni di $U_k + W_k$ e di $U_k \bigcap W_k$;

  Risposta $k \neq 1, 2$ $\dim U_k + W_k = 4$ e $\dim U_k \bigcap W_k = 0$; $\quad k = 2$ $\dim U_2 + W_2 = 3$ e $\dim U_2 \bigcap W_2 = 0$; $\quad k = 1$ $\dim U_1 + W_1 = 3$ e $\dim U_1 \bigcap W_1 = 1$ **(pt.3)**

- i valori di k, se esistono, per i quali la somma $U_k + W_k$ è diretta.

  Risposta $k \neq 1$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sono date le matrici $A = \begin{pmatrix} -22/3 & -2 & -1 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ -5/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ e $B_h = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & h \end{pmatrix}$.
Si dica, motivando la risposta, se la matrice A è invertibile e, in tal caso, si determinino, se esistono, i valori di h per i quali B_h è l'inversa di A.
Risposta A è invertibile perchè $|A| \neq 0$ e $A^{-1} = B_h$ per $h = -4$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 4 & k & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq -4$ **(pt.5)**

- posto $k = 0$, una matrice D diagonale simile ad A_0 e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

- Si dica, motivando la risposta, se la matrice A_0 risulta ortogonalmente diagonalizzabile.

  Risposta Non lo è perchè, pur essendo reale, non è simmetrica. **(pt.2)**

G

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1° test - 31/10/2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & k \\ 0 & 1 & k-2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- i valori di k, se esistono, per i quali il sistema $A_k X = B$ ammette autosoluzioni;

  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ esistono autosoluzioni **(pt.2)**

- per ciascuno di tali valori, lo spazio S_k delle soluzioni e la sua dimensione;

  Risposta $k \neq 2$ $S_k = \mathcal{L}((1-k, k-2, -1, 2))$, $\dim S_k = 1$
  $S_2 = \mathcal{L}((-1,0,1,0), (-1,0,0,1))$, $\dim S_2 = 2$ **(pt.3)**

Posto $k = 2$

- si determinino in S_2 una base B e una base B' ottenuta ortonormalizzando B rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$;

  Risposta $B = ((-1,0,1,0), (-1,0,0,1))$, $B' = (\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1,0), \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(-1/2, 0, -1/2, 1))$ **(pt.3)**

- si determinino le componenti di $v = (50, 0, -350, 300)$ rispetto alla base ortonormale B' di S_2.

  Risposta $\left(-200\sqrt{2}, 150\sqrt{6}\right)$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2k-4 \\ k+2 & 0 \end{pmatrix}\right)$ e $W_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 & k+5 \\ k+2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -k-2 \\ -k-2 & 1 \end{pmatrix}\right)$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- le dimensioni di U_k e di W_k;

  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ $\dim W_k = 2$; $k = -2 : \dim U_{-2} = 1$; $k \neq -2 : \dim U_k = 2$ **(pt.2)**

- le dimensioni di $U_k + W_k$ e di $U_k \bigcap W_k$;

  Risposta $k \neq -2, -3$ $\dim U_k + W_k = 4$ e $\dim U_k \bigcap W_k = 0$; $k = -2$ $\dim U_{-2} + W_{-2} = 3$ e $\dim U_{-2} \bigcap W_{-2} = 0$;
  $k = -3$ $\dim U_{-3} + W_{-3} = 3$ e $\dim U_{-3} \bigcap W_{-3} = 1$ **(pt.3)**

- i valori di k, se esistono, per i quali la somma $U_k + W_k$ è diretta.

  Risposta $k \neq -3$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sono date le matrici $A = \begin{pmatrix} -31/3 & -3 & -2 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ -13/3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ e $B_h = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & -5 & 2 \\ 1 & -8 & h \end{pmatrix}$.

Si dica, motivando la risposta, se la matrice A è invertibile e, in tal caso, si determinino, se esistono, i valori di h per i quali B_h è l'inversa di A.

Risposta A è invertibile perchè $|A| \neq 0$ e $A^{-1} = B_h$ per $h = -3$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 36 & k & 0 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq -4$ **(pt.5)**

- posto $k = 8$, una matrice D diagonale simile ad A_8 e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

- Si dica, motivando la risposta, se la matrice A_8 risulta ortogonalmente diagonalizzabile.

  Risposta Non lo è perchè, pur essendo reale, non è simmetrica. **(pt.2)**

H

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 31/10/2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & k-1 \\ 0 & k-3 & k & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- i valori di k, se esistono, per i quali il sistema $A_k X = B$ ammette autosoluzioni;

  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ esistono autosoluzioni ______ **(pt.2)**

- per ciascuno di tali valori, lo spazio S_k delle soluzioni e la sua dimensione;

  Risposta $k \neq 3$ $S_k = \mathcal{L}((k+3, -k, k-3, 0))$, $\dim S_k = 1$
  $S_3 = \mathcal{L}((-2,0,0,1),(-2,1,0,0))$, $\dim S_3 = 2$ ______ **(pt.3)**

Posto $k = 3$

- si determinino in S_3 una base B e una base B' ottenuta ortonormalizzando B rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$;

  Risposta $B = ((-2,0,0,1),(-2,1,0,0))$, $B' = (\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,0,0,1), \frac{\sqrt{5}}{3}(-2/5,1,0,-4/5))$ ______ **(pt.3)**

- si determinino le componenti di $v = (0,-150,0,150)$ rispetto alla base ortonormale B' di S_3.

  Risposta $\left(30\sqrt{5}, -90\sqrt{5}\right)$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 4 & k+1 \\ 2k-2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & k-3 \\ k-3 & 1 \end{pmatrix}\right)$ e $W_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 3 & 2k-2 \\ 2k-2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- le dimensioni di U_k e di W_k;

  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ $\dim U_k = 2$; $k = 1 : \dim W_1 = 1$; $k \neq 1 : \dim W_k = 2$ ______ **(pt.2)**

- le dimensioni di $U_k + W_k$ e di $U_k \bigcap W_k$;

  Risposta $k \neq 1, 3$ $\dim U_k + W_k = 4$ e $\dim U_k \bigcap W_k = 0$; $k = 1$ $\dim U_1 + W_1 = 3$ e $\dim U_1 \bigcap W_1 = 0$; $k = 3$ $\dim U_3 + W_3 = 3$ e $\dim U_3 \bigcap W_3 = 1$ ______ **(pt.3)**

- i valori di k, se esistono, per i quali la somma $U_k + W_k$ è diretta.

  Risposta $k \neq 3$ ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sono date le matrici $A = \begin{pmatrix} 23/3 & 1 & 2 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B_h = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & h \end{pmatrix}$.

Si dica, motivando la risposta, se la matrice A è invertibile e, in tal caso, si determinino, se esistono, i valori di h per i quali B_h è l'inversa di A.

Risposta A è invertibile perchè $|A| \neq 0$ e $A^{-1} = B_h$ per $h = -1$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & k & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 1$ ______ **(pt.5)**

- posto $k = 3$, una matrice D diagonale simile ad A_3 e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

- Si dica, motivando la risposta, se la matrice A_3 risulta ortogonalmente diagonalizzabile.

  Risposta Non lo è perchè, pur essendo reale, non è simmetrica. ______ **(pt.2)**

I

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 31/10/2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & k & 2 & 0 \\ k-2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- i valori di k, se esistono, per i quali il sistema $A_k X = B$ ammette autosoluzioni;

  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ esistono autosoluzioni **(pt.2)**

- per ciascuno di tali valori, lo spazio S_k delle soluzioni e la sua dimensione;

  Risposta $k \neq 2$ $\quad S_k = \mathcal{L}((-1, 2, 1-k, k-2)))$, $\quad \dim S_k = 1$
  $S_2 = \mathcal{L}((1, 0, -1, 0), (0, 1, -1, 0))$, $\quad \dim S_2 = 2$ **(pt.3)**

Posto $k = 2$

- si determinino in S_2 una base B e una base B' ottenuta ortonormalizzando B rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$;

  Risposta $B = ((1, 0, -1, 0), (0, 1, -1, 0))$, $\quad B' = (\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1, 0), \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(-1/2, 1, -1/2, 0))$ **(pt.3)**

- si determinino le componenti di $v = (210, 420, -630, 0)$ rispetto alla base ortonormale B' di S_2.

  Risposta $(420\sqrt{2}, 210\sqrt{6})$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2k \\ k & 0 \end{pmatrix}\right)$ e $W_k = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 2 & k+3 \\ k & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -k \\ -k & 1 \end{pmatrix}\right)$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- le dimensioni di U_k e di W_k;

  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ $\dim W_k = 2$; $k = 0 : \dim U_0 = 1$; $k \neq 0 : \dim U_k = 2$ **(pt.2)**

- le dimensioni di $U_k + W_k$ e di $U_k \bigcap W_k$;

  Risposta $k \neq 0, -1$ $\dim U_k + W_k = 4$ e $\dim U_k \bigcap W_k = 0$; $\quad k = 0$ $\dim U_0 + W_0 = 3$ e $\dim U_0 \bigcap W_0 = 0$; $k = -1$ $\dim U_{-1} + W_{-1} = 3$ e $\dim U_{-1} \bigcap W_{-1} = 1$ **(pt.3)**

- i valori di k, se esistono, per i quali la somma $U_k + W_k$ è diretta.

  Risposta $k \neq -1$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ sono date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 \\ 5/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$ e $B_h = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & h \end{pmatrix}$.
Si dica, motivando la risposta, se la matrice A è invertibile e, in tal caso, si determinino, se esistono, i valori di h per i quali B_h è l'inversa di A.
Risposta A è invertibile perchè $|A| \neq 0$ e $A^{-1} = B_h$ per $h = 2$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 2 & 0 \\ 8 & k & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di k per cui A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq -2$ **(pt.5)**

- posto $k = 6$, una matrice D diagonale simile ad A_6 e la relativa matrice diagonalizzante P.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $\quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

- Si dica, motivando la risposta, se la matrice A_6 risulta ortogonalmente diagonalizzabile.

  Risposta Non lo è perchè, pur essendo reale, non è simmetrica. **(pt.2)**