UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 31/10/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & k \\ 3 & k \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} -k \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile per $k = \pm 1$ con soluzione unica **(pt.2)**

- Posto $k = -1$, si determini l'insieme delle soluzioni del sistema.

  Risposta $S = \{(0, 1)\}$ **(pt.2)**

- Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la coppia $(0, -1)$ è soluzione del sistema.

  Risposta $k = 1$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ è dato l'insieme

$$U_k = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha + \beta & k^2 - 2k \\ \alpha & \beta + 2k \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $U_k = \mathcal{L}(U_k)$;

  Risposta $k = 0$ **(pt.2)**

- posto $k = 1$, si determini una base di $\mathcal{L}(U_k)$;

  Risposta $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ **(pt.1)**

- si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ appartiene a $U_k^{\perp}$ rispetto al prodotto scalare standard.

  Risposta $k = -1, 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 9 & k & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- lo scalare 5 è un autovalore di A_k;

  Risposta $k = 2, 8$ **(pt.1)**

- il vettore $(1, -3, -2)$ è un autovettore di A_k.

  Risposta $k = 3$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determini, se esiste, una sequenza di quattro vettori che non genera $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta $((1, 0, 0), (2, 0, 0), (3, 0, 0), (4, 0, 0))$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determini la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base $B' = ((11, 3, 0), (-6, 7, -2), (0, 0, 1))$.

Risposta $\begin{pmatrix} 11 & 3 & 0 \\ -6 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.1)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 31/10/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k+4 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & k+4 \\ 3 & k+4 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} -k-4 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile per $k = -5, -3$ con soluzione unica ________ **(pt.2)**

- Posto $k = -3$, si determini l'insieme delle soluzioni del sistema.

  Risposta $S = \{(0, -1)\}$ ________ **(pt.2)**

- Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la coppia $(2, 3)$ è soluzione del sistema.

  Risposta Non esiste k ________ **(pt.1)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ è dato l'insieme

$$U_k = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \alpha+\beta \\ k^2+2k & \beta+2k+4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $U_k = \mathcal{L}(U_k)$;

  Risposta $k = -2$ ________ **(pt.2)**

- posto $k = -1$, si determini una base di $\mathcal{L}(U_k)$;

  Risposta $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ ________ **(pt.1)**

- si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2/3 & -1 \end{pmatrix}$ appartiene a $U_k^{\perp}$ rispetto al prodotto scalare standard.

  Risposta $k = -3, -2$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 9 & k & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- lo scalare 4 è un autovalore di A_k;

  Risposta $k = 1, 7$ ________ **(pt.1)**

- il vettore $(0, 0, 1)$ è un autovettore di A_k.

  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ si determini, se esiste, una sequenza di tre vettori che non genera $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta $((1, 0), (2, 0), (3, 0))$ ________ **(pt.1)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determini la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base $B' = ((2, 15, -5), (0, 1, 0), (3, -8, 4))$.

Risposta $\begin{pmatrix} 2 & 15 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -8 & 4 \end{pmatrix}$ ________ **(pt.1)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 31/10/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k-3 \\ 0 & 1 \\ k-3 & 2 \\ k-3 & 3 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} -k+3 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile per $k = 2, 4$ con soluzione unica **(pt.2)**

- Posto $k = 2$, si determini l'insieme delle soluzioni del sistema.

  Risposta $S = \{(1, 0)\}$ **(pt.2)**

- Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la coppia $(-1, 0)$ è soluzione del sistema.

  Risposta $k = 4$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ è dato l'insieme

$$U_k = \left\{ \begin{pmatrix} \beta + 2k - 2 & \alpha + \beta \\ \alpha & k^2 - 4k + 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $U_k = \mathcal{L}(U_k)$;

  Risposta $k = 1$ **(pt.2)**

- posto $k = 2$, si determini una base di $\mathcal{L}(U_k)$;

  Risposta $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ **(pt.1)**

- si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2/3 \end{pmatrix}$ appartiene a $U_k^\perp$ rispetto al prodotto scalare standard.

  Risposta $k = 0, 1$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 9 & k & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- lo scalare 6 è un autovalore di A_k;

  Risposta $k = 3, 9$ **(pt.1)**

- il vettore $(1, 1, 0)$ è un autovettore di A_k.

  Risposta Non esiste $k \in \mathbb{R}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determini, se esiste, una sequenza di cinque vettori che non genera $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta $((1, 0, 0, 0), (2, 0, 0, 0), (3, 0, 0, 0), (4, 0, 0, 0), (5, 0, 0, 0))$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determini la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base $B' = ((0, 1, 0), (2, 7, 1), (3, -4, 5))$.

Risposta $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ **(pt.1)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 31/10/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k+3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & k+3 \\ 3 & k+3 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} -k-3 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile per $k = -4, -2$ con soluzione unica ______ **(pt.2)**

- Posto $k = -2$, si determini l'insieme delle soluzioni del sistema.

  Risposta $S = \{(0, -1)\}$ ______ **(pt.2)**

- Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la coppia $(2, 3)$ è soluzione del sistema.

  Risposta Non esiste k ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ è dato l'insieme

$$U_k = \left\{ \begin{pmatrix} k^2-1 & \alpha+\beta \\ \alpha & \beta+2k+2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $U_k = \mathcal{L}(U_k)$;

  Risposta $k = -1$ ______ **(pt.2)**

- posto $k = 0$, si determini una base di $\mathcal{L}(U_k)$;

  Risposta $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ ______ **(pt.1)**

- si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} -2/3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ appartiene a $U_k^{\perp}$ rispetto al prodotto scalare standard.

  Risposta $k = -2, -1$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k+3 & 1 & 0 \\ 9 & k+3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- lo scalare 5 è un autovalore di A_k;

  Risposta $k = -1, 5$ ______ **(pt.1)**

- il vettore $(1, -3, -2)$ è un autovettore di A_k.

  Risposta $k = 0$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determini, se esiste, una sequenza di quattro vettori che non genera $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta $((1, 0, 0), (2, 0, 0), (3, 0, 0), (4, 0, 0))$ ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determini la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base $B' = ((0, 1, 0), (7, -2, -6), (0, 3, 11))$.

Risposta $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & 11 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.1)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 31/10/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -k & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -k \\ 3 & -k \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile per $k = \pm 1$ con soluzione unica **(pt.2)**

- Posto $k = 1$, si determini l'insieme delle soluzioni del sistema.

  Risposta $S = \{(0, 1)\}$ **(pt.2)**

- Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la coppia $(0, -1)$ è soluzione del sistema.

  Risposta $k = -1$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ è dato l'insieme

$$U_k = \left\{ \begin{pmatrix} k^2 + 4k + 3 & \alpha \\ \alpha + \beta & \beta + 2k + 6 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $U_k = \mathcal{L}(U_k)$;

  Risposta $k = -3$ **(pt.2)**

- posto $k = -2$, si determini una base di $\mathcal{L}(U_k)$;

  Risposta $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$ **(pt.1)**

- si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} -2/3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ appartiene a $U_k^\perp$ rispetto al prodotto scalare standard.

  Risposta $k = -4, -3$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k+3 & 1 & 0 \\ 9 & k+3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- lo scalare 4 è un autovalore di A_k;

  Risposta $k = -2, 4$ **(pt.1)**

- il vettore $(0, 0, 1)$ è un autovettore di A_k.

  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ si determini, se esiste, una sequenza di tre vettori che non genera $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta $((1, 0), (2, 0), (3, 0))$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determini la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base $B' = ((-8, 4, 3), (1, 0, 0), (15, -5, 2))$.

Risposta $\begin{pmatrix} -8 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 15 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ **(pt.1)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 31/10/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k-2 \\ 0 & 1 \\ k-2 & 2 \\ k-2 & 3 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 2-k \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile per $k = 1, 3$ con soluzione unica __________ **(pt.2)**

- Posto $k = 3$, si determini l'insieme delle soluzioni del sistema.

  Risposta $S = \{(-1, 0)\}$ __________ **(pt.2)**

- Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la coppia $(3, 2)$ è soluzione del sistema.

  Risposta Non esiste k __________ **(pt.1)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ è dato l'insieme

$$U_k = \left\{ \begin{pmatrix} k^2+6k+8 & \beta+2k+8 \\ \alpha & \alpha+\beta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $U_k = \mathcal{L}(U_k)$;

  Risposta $k = -4$ __________ **(pt.2)**

- posto $k = -3$, si determini una base di $\mathcal{L}(U_k)$;

  Risposta $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ __________ **(pt.1)**

- si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} -2/3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ appartiene a $U_k^\perp$ rispetto al prodotto scalare standard.

  Risposta $k = -5, -4$ __________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k+3 & 1 & 0 \\ 9 & k+3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- lo scalare 6 è un autovalore di A_k;

  Risposta $k = 0, 6$ __________ **(pt.1)**

- il vettore $(1, 1, 0)$ è un autovettore di A_k.

  Risposta Non esiste $k \in \mathbb{R}$ __________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determini, se esiste, una sequenza di cinque vettori che non genera $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta $((1, 0, 0, 0), (2, 0, 0, 0), (3, 0, 0, 0), (4, 0, 0, 0), (5, 0, 0, 0))$ __________ **(pt.1)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determini la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base $B' = ((7, 1, 2), (1, 0, 0), (-4, 5, 3))$.

Risposta $\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ __________ **(pt.1)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 31/10/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k+2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & k+2 \\ 3 & k+2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} -k-2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile per $k = -3, -1$ con soluzione unica ______ **(pt.2)**

- Posto $k = -3$, si determini l'insieme delle soluzioni del sistema.

  Risposta $S = \{(0,1)\}$ ______ **(pt.2)**

- Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la coppia $(0,-1)$ è soluzione del sistema.

  Risposta $k = -1$ ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ è dato l'insieme

$$U_k = \left\{ \begin{pmatrix} k^2-6k+8 & \alpha+\beta \\ \beta+2k-4 & \alpha \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $U_k = \mathcal{L}(U_k)$;

  Risposta $k = 2$ ______ **(pt.2)**

- posto $k = 3$, si determini una base di $\mathcal{L}(U_k)$;

  Risposta $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ ______ **(pt.1)**

- si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} -2/3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ appartiene a $U_k^\perp$ rispetto al prodotto scalare standard.

  Risposta $k = 1, 2$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k-3 & 1 & 0 \\ 9 & k-3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- lo scalare 5 è un autovalore di A_k;

  Risposta $k = 5, 11$ ______ **(pt.1)**

- il vettore $(1,-3,-2)$ è un autovettore di A_k.

  Risposta $k = 6$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determini, se esiste, una sequenza di quattro vettori che non genera $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta $((1,0,0),(2,0,0),(3,0,0),(4,0,0))$ ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determini la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base $B' = ((3,0,12),(7,-4,-2),(0,1,0))$.

Risposta $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 12 \\ 7 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.1)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 31/10/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k-1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & k-1 \\ 3 & k-1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 1-k \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile per $k = 0, 2$ con soluzione unica __________ **(pt.2)**

- Posto $k = 2$, si determini l'insieme delle soluzioni del sistema.

  Risposta $S = \{(0, -1)\}$ __________ **(pt.2)**

- Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la coppia $(2, 3)$ è soluzione del sistema.

  Risposta Non esiste $k \in \mathbb{R}$ __________ **(pt.1)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ è dato l'insieme

$$U_k = \left\{ \begin{pmatrix} \beta + 2k + 10 & k^2 + 8k + 15 \\ \alpha + \beta & \alpha \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $U_k = \mathcal{L}(U_k)$;

  Risposta $k = -5$ __________ **(pt.2)**

- posto $k = -4$, si determini una base di $\mathcal{L}(U_k)$;

  Risposta $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ __________ **(pt.1)**

- si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2/3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ appartiene a $U_k^{\perp}$ rispetto al prodotto scalare standard.

  Risposta $k = -6, -5$ __________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k-3 & 1 & 0 \\ 9 & k-3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- lo scalare 4 è un autovalore di A_k;

  Risposta $k = 4, 10$ __________ **(pt.1)**

- il vettore $(0, 0, 1)$ è un autovettore di A_k.

  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ __________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ si determini, se esiste, una sequenza di tre vettori che non genera $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta $((1, 0), (2, 0), (3, 0))$ __________ **(pt.1)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determini la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base $B' = ((1, -2, 5), (0, 17, -9), (0, 1, 2))$.

Risposta $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 17 & -9 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ __________ **(pt.1)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 31/10/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \\ k+1 & 2 \\ k+1 & 3 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} -k-1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

  Risposta Compatibile per $k = -2, 0$ con soluzione unica ______ **(pt.2)**

- Posto $k = -2$, si determini l'insieme delle soluzioni del sistema.

  Risposta $S = \{(1, 0)\}$ ______ **(pt.2)**

- Si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la coppia $(-1, 0)$ è soluzione del sistema.

  Risposta $k = 0$ ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ è dato l'insieme

$$U_k = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta + 2k - 6 \\ k^2 - 8k + 15 & \alpha + \beta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \; : \; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

dove k è un parametro reale.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $U_k = \mathcal{L}(U_k)$;

  Risposta $k = 3$ ______ **(pt.2)**

- posto $k = 4$, si determini una base di $\mathcal{L}(U_k)$;

  Risposta $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ ______ **(pt.1)**

- si stabilisca per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2/3 & 1 \end{pmatrix}$ appartiene a $U_k^\perp$ rispetto al prodotto scalare standard.

  Risposta $k = 2, 3$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k-3 & 1 & 0 \\ 9 & k-3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- lo scalare 6 è un autovalore di A_k;

  Risposta $k = 6, 12$ ______ **(pt.1)**

- il vettore $(1, 1, 0)$ è un autovettore di A_k.

  Risposta Non esiste $k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determini, se esiste, una sequenza di cinque vettori che non genera $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta $((1,0,0,0), (2,0,0,0), (3,0,0,0), (4,0,0,0), (5,0,0,0))$ ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si determini la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base $B' = ((0,1,5), (1,3,-6), (0,2,3))$.

Risposta $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.1)**