UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 6^o appello - 01/09/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	PROVA DI TEORIA ORALE ☐

ESERCIZIO 1. In $M_2(\mathbb{R})$ con prodotto scalare standard, sia A il sottospazio

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ : z - t = 0, \ y + z = 0, \ x, y, z, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si determinino:

- una base di A;

  Risposta $\mathcal{B}_A = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$ **(pt.2A)**

- le componenti di $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base indicata al punto precedente;

  Risposta $(1, -2)$ **(pt.2A)**

- una base del complemento ortogonale di A in $M_2(\mathbb{R})$.

  Risposta $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 2. Siano $A_k = \begin{pmatrix} 2 & k+1 & k \\ 0 & k & 2 \\ 0 & 2 & k \end{pmatrix}$ e $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 4-k \end{pmatrix}$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Indicare:

- i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 0, 4$ **(pt.2A)**

- i valori del parametro k per i quali il sistema $A_k x = B_k$ è compatibile, precisando il numero delle soluzioni;

  Risposta Compatibile per $k \neq -2$. Per $k = 2$, ∞^1 soluzioni; per $k \neq \pm 2$, soluzione unica **(pt.2A)**

- posto $k = 1$, l'insieme delle soluzioni di $A_1 x = B_1$.

  Risposta $S = \{(-3/2, 5/3, -1/3)\}$ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q} \ : \ 9x^2 - y^2 + z^2 - 18x + 9 = 0$.

- Si riconosca $\mathcal{Q}$, precisando la natura dei suoi punti semplici.

  Risposta Cono, punti semplici parabolici **(pt.2G)**

- Si determinino le coordinate degli eventuali punti doppi di $\mathcal{Q}$.

  Risposta $(1, 0, 0)$ **(pt.1G)**

- Si stabilisca, motivando la risposta, se la sezione di $\mathcal{Q}$ con il piano $z = 0$ è riducibile. In tal caso si indichino le equazioni cartesiane delle sue componenti.

  Risposta $3x \pm y - 3 = 0 = z$. Riducibile perché il piano passa per il vertice **(pt.2G)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{\mathbb{E}}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k \ : \ (1-k)x^2 - (1+k)y^2 + 5k + 3 = 0$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori del parametro k per i quali:

- la conica $\mathcal{C}_k$ è degenere;

  Risposta $k = -1, -3/5, 1$ **(pt.2G)**

- la conica $\mathcal{C}_k$ passa per $P_\infty = [(2, 1, 0)]$.

  Risposta $k = 3/5$ **(pt.1G)**

Posto $k = 3$, si determini il polo della retta $r \ : \ x - 1 = 0$, rispetto alla polarità indotta da $\mathcal{C}_3$.
Risposta $(9, 0)$ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 6^o appello - 01/09/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	PROVA DI TEORIA ORALE ☐

ESERCIZIO 1. In $M_2(\mathbb{R})$ con prodotto scalare standard, sia A il sottospazio

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ : z - x = 0, \ y + z = 0, \ x, y, z, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si determinino:

- una base di A;

  Risposta $\mathcal{B}_A = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ **(pt.2A)**

- le componenti di $a = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base indicata al punto precedente;

  Risposta $(-3, 2)$ **(pt.2A)**

- una base del complemento ortogonale di A in $M_2(\mathbb{R})$.

  Risposta $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 2. Siano $A_k = \begin{pmatrix} 2 & k+2 & k+1 \\ 0 & k+1 & 2 \\ 0 & 2 & k+1 \end{pmatrix}$ e $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k+1 \\ 3-k \end{pmatrix}$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Indicare:

- i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq -1, 3$ **(pt.2A)**

- i valori del parametro k per i quali il sistema $A_k x = B_k$ è compatibile, precisando il numero delle soluzioni;

  Risposta Compatibile per $k \neq -3$. Per $k = 1$, ∞^1 soluzioni; per $k \neq -3, 1$, soluzione unica **(pt.2A)**

- posto $k = 2$, l'insieme delle soluzioni di $A_2 x = B_2$.

  Risposta $S = \{(-19/10, 7/5, -3/5)\}$ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q} \ : \ x^2 - 9y^2 - z^2 + 36y - 36 = 0$.

- Si riconosca $\mathcal{Q}$, precisando la natura dei suoi punti semplici.

  Risposta Cono, punti semplici parabolici **(pt.2G)**

- Si determinino le coordinate degli eventuali punti doppi di $\mathcal{Q}$.

  Risposta $(0, 2, 0)$ **(pt.1G)**

- Si stabilisca, motivando la risposta, se la sezione di $\mathcal{Q}$ con il piano $z = 0$ è riducibile. In tal caso si indichino le equazioni cartesiane delle sue componenti.

  Risposta $\pm x + 3y - 6 = 0 = z$. Riducibile perché il piano passa per il vertice **(pt.2G)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{\mathbb{E}}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k \ : \ kx^2 + (2+k)y^2 - 5k - 8 = 0$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori del parametro k per i quali:

- la conica $\mathcal{C}_k$ è degenere;

  Risposta $k = -2, -8/5, 0$ **(pt.2G)**

- la conica $\mathcal{C}_k$ passa per $P_\infty = [(2, 1, 0)]$.

  Risposta $k = -2/5$ **(pt.1G)**

Posto $k = -4$, si determini il polo della retta $r \ : \ x - 1 = 0$, rispetto alla polarità indotta da $\mathcal{C}_{-4}$.
Risposta $(3, 0)$ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 6^o appello - 01/09/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	PROVA DI TEORIA ORALE ☐

ESERCIZIO 1. In $M_2(\mathbb{R})$ con prodotto scalare standard, sia A il sottospazio

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ : y - t = 0,\ y + z = 0,\ x, y, z, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si determinino:

- una base di A;

  Risposta $\mathcal{B}_A = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right)$ ______ **(pt.2A)**

- le componenti di $a = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ rispetto alla base indicata al punto precedente;

  Risposta $(5, -4)$ ______ **(pt.2A)**

- una base del complemento ortogonale di A in $M_2(\mathbb{R})$.

  Risposta $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$ ______ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 2. Siano $A_k = \begin{pmatrix} 2 & k+3 & k+2 \\ 0 & k+2 & 2 \\ 0 & 2 & k+2 \end{pmatrix}$ e $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k+2 \\ 2-k \end{pmatrix}$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Indicare:

- i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq -2, 2$ ______ **(pt.2A)**

- i valori del parametro k per i quali il sistema $A_k x = B_k$ è compatibile, precisando il numero delle soluzioni;

  Risposta Compatibile per $k \neq -4$. Per $k = 0$, ∞^1 soluzioni; per $k \neq -4, 0$, soluzione unica ______ **(pt.2A)**

- posto $k = 3$, l'insieme delle soluzioni di $A_3 x = B_3$.

  Risposta $S = \{(-29/14, 9/7, -5/7)\}$ ______ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}\ :\ 9x^2 - y^2 + z^2 + 18x + 9 = 0$.

- Si riconosca $\mathcal{Q}$, precisando la natura dei suoi punti semplici.

  Risposta Cono, punti semplici parabolici ______ **(pt.2G)**

- Si determinino le coordinate degli eventuali punti doppi di $\mathcal{Q}$.

  Risposta $(-1, 0, 0)$ ______ **(pt.1G)**

- Si stabilisca, motivando la risposta, se la sezione di $\mathcal{Q}$ con il piano $z = 0$ è riducibile. In tal caso si indichino le equazioni cartesiane delle sue componenti.

  Risposta $3x \pm y + 3 = 0 = z$. Riducibile perché il piano passa per il vertice ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{\mathbb{E}}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k\ :\ (-1-k)x^2 - (3+k)y^2 + 5k + 13 = 0$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori del parametro k per i quali:

- la conica $\mathcal{C}_k$ è degenere;

  Risposta $k = -3, -13/5, -1$ ______ **(pt.2G)**

- la conica $\mathcal{C}_k$ passa per $P_\infty = [(2, 1, 0)]$.

  Risposta $k = -7/5$ ______ **(pt.1G)**

Posto $k = 3$, si determini il polo della retta $r\ :\ x - 1 = 0$, rispetto alla polarità indotta da $\mathcal{C}_3$.

Risposta $(7, 0)$ ______ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 6^o appello - 01/09/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	PROVA DI TEORIA ORALE ☐

ESERCIZIO 1. In $M_2(\mathbb{R})$ con prodotto scalare standard, sia A il sottospazio

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ : y - x = 0, \ y + z = 0, \ x, y, z, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si determinino:

- una base di A;

  Risposta $\mathcal{B}_A = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ ______ **(pt.2A)**

- le componenti di $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ rispetto alla base indicata al punto precedente;

  Risposta $(1, -3)$ ______ **(pt.2A)**

- una base del complemento ortogonale di A in $M_2(\mathbb{R})$.

  Risposta $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ ______ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 2. Siano $A_k = \begin{pmatrix} 2 & k & k-1 \\ 0 & k-1 & 2 \\ 0 & 2 & k-1 \end{pmatrix}$ e $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k-1 \\ 5-k \end{pmatrix}$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Indicare:

- i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 1, 5$ ______ **(pt.2A)**

- i valori del parametro k per i quali il sistema $A_k x = B_k$ è compatibile, precisando il numero delle soluzioni;

  Risposta Compatibile per $k \neq -1$. Per $k = 3$, ∞^1 soluzioni; per $k \neq -1, 3$, soluzione unica ______ **(pt.2A)**

- posto $k = 2$, l'insieme delle soluzioni di $A_2 x = B_2$.

  Risposta $S = \{(-3/2, 5/3, -1/3)\}$ ______ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q} \ : \ x^2 - 9y^2 - z^2 + 54y - 81 = 0$.

- Si riconosca $\mathcal{Q}$, precisando la natura dei suoi punti semplici.

  Risposta Cono, punti semplici parabolici ______ **(pt.2G)**

- Si determinino le coordinate degli eventuali punti doppi di $\mathcal{Q}$.

  Risposta $(0, 3, 0)$ ______ **(pt.1G)**

- Si stabilisca, motivando la risposta, se la sezione di $\mathcal{Q}$ con il piano $z = 0$ è riducibile. In tal caso si indichino le equazioni cartesiane delle sue componenti.

  Risposta $\pm x + 3y - 9 = 0 = z$. Riducibile perché il piano passa per il vertice ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{\mathbb{E}}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k \ : \ (3-k)x^2 - (k-1)y^2 + 5k - 7 = 0$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori del parametro k per i quali:

- la conica $\mathcal{C}_k$ è degenere;

  Risposta $k = 1, 7/5, 3$ ______ **(pt.2G)**

- la conica $\mathcal{C}_k$ passa per $P_\infty = [(2, 1, 0)]$.

  Risposta $k = 13/5$ ______ **(pt.1G)**

Posto $k = 2$, si determini il polo della retta $r \ : \ x - 1 = 0$, rispetto alla polarità indotta da $\mathcal{C}_2$.
Risposta $(-3, 0)$ ______ **(pt.2G)**