UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 5^o appello - 01/07/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	PROVA DI TEORIA ORALE ☐

ESERCIZIO 1. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B_k = \begin{pmatrix} k \\ 2k-3 \\ k-1 \end{pmatrix}$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Si indichino:

- gli autovalori della matrice A;
  Risposta $-1, 0, 3$ **(pt.2A)**
- i valori del parametro k per i quali il sistema $Ax = B_k$ è compatibile, precisando il numero delle soluzioni;
  Risposta Compatibile solo per $k = 1$, con ∞^1 soluzioni **(pt.2A)**
- posto $k = 1$, l'insieme delle soluzioni di $Ax = B_1$.
  Risposta $S = \{(1-2t, 1-t, t) \in \mathbb{R}^3 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ siano $A = [(2,1,0,0), (1,0,-1,0), (0,1,2,0)]$ e $B_k = [(k,1,-1,k+1), (0,1,-1,k+1)]$ due sistemi di vettori, al variare del parametro reale k. Determinare:

- le dimensioni di $\mathcal{L}(A)$, di $\mathcal{L}(B_k)$ e di $\mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B_k)$;
  Risposta $\dim\mathcal{L}_A = 2$; $\dim\mathcal{L}_{B_k} = 2$ per $k \neq 0$, $\dim\mathcal{L}_{B_0} = 1$;
  $\dim(\mathcal{L}_A + \mathcal{L}_{B_k}) = 4$ per $k \neq -1, 0$, $\dim(\mathcal{L}_A + \mathcal{L}_{B_k}) = 3$ per $k = -1, 0$ **(pt.3A)**
- i valori del parametro k per i quali la somma $\mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B_k)$ è diretta;
  Risposta $k \neq -1$ **(pt.1A)**
- una base del sottospazio $A^\perp$.
  Risposta $((1,-2,1,0), (0,0,0,1))$ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$, dati i punti $A = (-1,0,1)$, $B = (2,0,0)$ e $C = (0,4,0)$ e il piano $\pi \ : \ x + 2y + 6 = 0$, si determinino le equazioni cartesiane:

- del piano passante per A, B e C;
  Risposta $2x + y + 6z - 4 = 0$ **(pt.1G)**
- del piano parallelo a π e passante per A;
  Risposta $x + 2y + 1 = 0$ **(pt.2G)**
- della retta perpendicolare a π e passante per B.
  Risposta $z = 0 = 2x - y - 4$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 4. In $E_3(\mathbb{R})$, sono date la sfera $\Sigma \ : \ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 9 = 0$ e il piano $\pi : \ y - 3 = 0$. Determinare:

- le coordinate del centro e la misura del raggio di Σ;
  Risposta $C = (1,0,1)$; $r = \sqrt{11}$ **(pt.2G)**
- le coordinate del centro e la misura del raggio della circonferenza $\Sigma \cap \pi$.
  Risposta $C' = (1,3,1)$; $r' = \sqrt{2}$ **(pt.3G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 5^o appello - 01/07/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	PROVA DI TEORIA ORALE ☐

ESERCIZIO 1. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ e $B_k = \begin{pmatrix} -k \\ 2k-1 \\ k \end{pmatrix}$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Si indichino:

- gli autovalori della matrice A;
  Risposta $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$ ________________ **(pt.2A)**
- i valori del parametro k per i quali il sistema $Ax = B_k$ è compatibile, precisando il numero delle soluzioni;
  Risposta Compatibile solo per $k = 0$, con ∞^1 soluzioni ________________ **(pt.2A)**
- posto $k = 0$, l'insieme delle soluzioni di $Ax = B_0$.
  Risposta $S = \{(4t, 2t, 5t + 1/2) \in \mathbb{R}^3 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$ ________________ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ siano $A = [(2, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 2)]$ e $B_k = [(k-2, 1, 0, k-1), (1, 1, k-3, 2)]$ due sistemi di vettori, al variare del parametro reale k. Determinare:

- le dimensioni di $\mathcal{L}(A)$, di $\mathcal{L}(B_k)$ e di $\mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B_k)$;
  Risposta $\dim\mathcal{L}_A = 3$; $\dim\mathcal{L}_{B_k} = 2$ per $k \neq 3$, $\dim\mathcal{L}_{B_3} = 1$;
  $\dim(\mathcal{L}_A + \mathcal{L}_{B_k}) = 4$ per $k \neq 3$, $\dim(\mathcal{L}_A + \mathcal{L}_{B_3}) = 3$. ________________ **(pt.3A)**
- i valori del parametro k per i quali la somma $\mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B_k)$ è diretta;
  Risposta $\nexists k$ ________________ **(pt.1A)**
- una base del sottospazio $A^\perp$.
  Risposta $((0, 0, 1, 0))$ ________________ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$, dati i punti $A = (-1, 0, 1)$, $B = (0, 0, 2)$ e $C = (-3, 0, 0)$ e il piano $\pi \ : \ 3x - 2y + 6 = 0$, si determinino le equazioni cartesiane:

- del piano passante per A, B e C;
  Risposta $y = 0$ ________________ **(pt.1G)**
- del piano parallelo a π e passante per A;
  Risposta $3x - 2y + 3 = 0$ ________________ **(pt.2G)**
- della retta perpendicolare a π e passante per B.
  Risposta $z - 2 = 0 = 2x + 3y$ ________________ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 4. In $E_3(\mathbb{R})$, sono date la sfera $\Sigma \ : \ x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 24 = 0$ e il piano $\pi : \ 2x - 2y + z - 10 = 0$. Determinare:

- le coordinate del centro e la misura del raggio di Σ;
  Risposta $C = (0, 0, 1)$; $r = 5$ ________________ **(pt.2G)**
- le coordinate del centro e la misura del raggio della circonferenza $\Sigma \cap \pi$.
  Risposta $C' = (2, -2, 2)$; $r' = 4$ ________________ **(pt.3G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 5^o appello - 01/07/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	PROVA DI TEORIA ORALE ☐

ESERCIZIO 1. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $B_k = \begin{pmatrix} k-6 \\ k \\ k-1 \end{pmatrix}$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Si indichino:

- gli autovalori della matrice A;
  Risposta $-1, -1, 0$ **(pt.2A)**
- i valori del parametro k per i quali il sistema $Ax = B_k$ è compatibile, precisando il numero delle soluzioni;
  Risposta Compatibile solo per $k = 3$, con ∞^1 soluzioni **(pt.2A)**
- posto $k = 3$, l'insieme delle soluzioni di $Ax = B_3$.
  Risposta $S = \{(7 + 2t, -5 - t, t) \in \mathbb{R}^3 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ siano $A = [(1, 2, 0, 0), (0, 1, -1, 0), (1, 0, 2, 0)]$ e $B_k = [(1, k-2, -1, k-1), (1, 0, -1, k-1)]$ due sistemi di vettori, al variare del parametro reale k. Determinare:

- le dimensioni di $\mathcal{L}(A)$, di $\mathcal{L}(B_k)$ e di $\mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B_k)$;
  Risposta $\dim\mathcal{L}_A = 2$; $\dim\mathcal{L}_{B_k} = 2$ per $k \neq 2$, $\dim\mathcal{L}_{B_2} = 1$;
  $\dim(\mathcal{L}_A + \mathcal{L}_{B_k}) = 4$ per $k \neq 1, 2$, $\dim(\mathcal{L}_A + \mathcal{L}_{B_k}) = 3$ per $k = 1, 2$ **(pt.3A)**
- i valori del parametro k per i quali la somma $\mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B_k)$ è diretta;
  Risposta $k \neq 1$ **(pt.1A)**
- una base del sottospazio $A^\perp$.
  Risposta $((-2, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$, dati i punti $A = (-1, 0, 3)$, $B = (-1, 0, 0)$ e $C = (0, 4, 0)$ e il piano $\pi \ : \ x - 2y + 6 = 0$, si determinino le equazioni cartesiane:

- del piano passante per A, B e C;
  Risposta $4x - y + 4 = 0$ **(pt.1G)**
- del piano parallelo a π e passante per A;
  Risposta $x - 2y + 1 = 0$ **(pt.2G)**
- della retta perpendicolare a π e passante per B.
  Risposta $2x + y + 2 = 0 = z$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 4. In $E_3(\mathbb{R})$, sono date la sfera $\Sigma \ : \ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 12 = 0$ e il piano $\pi : \ y - 3 = 0$. Determinare:

- le coordinate del centro e la misura del raggio di Σ;
  Risposta $C = (1, 0, 0)$; $r = \sqrt{13}$ **(pt.2G)**
- le coordinate del centro e la misura del raggio della circonferenza $\Sigma \cap \pi$.
  Risposta $C' = (1, 3, 0)$; $r' = 2$ **(pt.3G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 5^o appello - 01/07/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	PROVA DI TEORIA ORALE ☐

ESERCIZIO 1. Siano $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ e $B_k = \begin{pmatrix} k-1 \\ k-2 \\ k-3 \end{pmatrix}$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Si indichino:

- gli autovalori della matrice A;
  Risposta $-3, -2, 0$ ______ **(pt.2A)**
- i valori del parametro k per i quali il sistema $Ax = B_k$ è compatibile, precisando il numero delle soluzioni;
  Risposta Compatibile solo per $k = -1$, con ∞^1 soluzioni ______ **(pt.2A)**
- posto $k = -1$, l'insieme delle soluzioni di $Ax = B_{-1}$.
  Risposta $S = \{(4t-2, 5t-3/2, 2t) \in \mathbb{R}^3 \ : \ t \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ siano $A = [(2,1,0,0),(1,0,0,0),(0,1,2,0)]$ e $B_k = [(k-4, 1, k-3, 0),(1,1,2,k-5)]$ due sistemi di vettori, al variare del parametro reale k. Determinare:

- le dimensioni di $\mathcal{L}(A)$, di $\mathcal{L}(B_k)$ e di $\mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B_k)$;
  Risposta $\dim\mathcal{L}_A = 3$; $\dim\mathcal{L}_{B_k} = 2$ per $k \neq 5$, $\dim\mathcal{L}_{B_5} = 1$;
  $\dim(\mathcal{L}_A + \mathcal{L}_{B_k}) = 4$ per $k \neq 5$, $\dim(\mathcal{L}_A + \mathcal{L}_{B_5}) = 3$ ______ **(pt.3A)**
- i valori del parametro k per i quali la somma $\mathcal{L}(A) + \mathcal{L}(B_k)$ è diretta;
  Risposta $\nexists k$ ______ **(pt.1A)**
- una base del sottospazio $A^\perp$.
  Risposta $((0,0,0,1))$ ______ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$, dati i punti $A = (-1,0,1)$, $B = (0,0,2)$ e $C = (-2,-2,0)$ e il piano $\pi \ : \ 3x - y + 4 = 0$, si determinino le equazioni cartesiane:

- del piano passante per A, B e C;
  Risposta $x - z + 2 = 0$ ______ **(pt.1G)**
- del piano parallelo a π e passante per A;
  Risposta $3x - y + 3 = 0$ ______ **(pt.2G)**
- della retta perpendicolare a π e passante per B.
  Risposta $x + 3y = 0 = z - 2$ ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 4. In $E_3(\mathbb{R})$, sono date la sfera $\Sigma \ : \ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 20 = 0$ e il piano $\pi : \ 2x - 2y + z - 12 = 0$. Determinare:

- le coordinate del centro e la misura del raggio di Σ;
  Risposta $C = (1,0,1)$; $r = \sqrt{22}$ ______ **(pt.2G)**
- le coordinate del centro e la misura del raggio della circonferenza $\Sigma \cap \pi$.
  Risposta $C' = (3,-2,2)$; $r' = \sqrt{13}$ ______ **(pt.3G)**