UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 31/01/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema $A_k X = B_k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, con

$$A_k = \begin{pmatrix} k & k+2 \\ 0 & -k \\ -1 & k \end{pmatrix}, \qquad B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k+1 \end{pmatrix}.$$

Si determinino:

- il numero di soluzioni del sistema, dopo aver indicato per quali valori di k è compatibile;
  Risposta Sistema compatibile solo per $k = -1, 0$ con soluzione unica in entrambi i casi __________ **(pt.3A)**
- i valori di k per i quali l'insieme delle soluzioni del sistema è un sottospazio di $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$;
  Risposta $k = -1$ __________ **(pt.1A)**
- posto $k = -1$, determinare l'insieme delle soluzioni del sistema $A_{-1}X = B_{-1}$.
  Risposta $\{(0;0)\}$ __________ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 2. Si consideri, in $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ e al variare del parametro reale k (dove compare), i due sottospazi:

$$U_k = \mathcal{L}\left((k+1, k+1, 0, 0), (-1, 0, k, 0)\right), \qquad W = \mathcal{L}\left((2, 1, 1, 0), (-2, 4, 0, 2)\right).$$

Si determinino:

- la dimensione di U_k, al variare di $k \in \mathbb{R}$, e la dimensione di W;
  Risposta $\dim U_k = 2$ se $k \neq -1$; $\dim U_{-1} = 1$; $\dim W = 2$ __________ **(pt.2A)**
- i valori di k per i quali $U_k + W = \mathbb{R}^4$;
  Risposta $k \neq -1$ __________ **(pt.2A)**
- i valori di k per i quali la somma $U_k \oplus W$ è diretta;
  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ __________ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette: $r\ :\ x + y = 0 = y - z$ ed $a\ :\ x - y = 0 = 2x + z$.

- Stabilire la posizione reciproca delle rette r e a.
  Risposta Le rette r e a sono incidenti nell'origine __________ **(pt.2G)**
- Detta $\mathcal{Q}$ la superficie generata dalla retta r nella rotazione di asse a, la si riconosca e se ne determinino gli eventuali punti multipli.
  Risposta Cono a falda reale con vertice $V(0;0;0)$ __________ **(pt.2G)**
- Stabilire la natura dei punti semplici di $\mathcal{Q}$.
  Risposta I punti semplici di $\mathcal{Q}$ sono parabolici __________ **(pt.1G)**

ESERCIZIO 4. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati la retta: $r\ :\ x + 3y + 1 = 0 = 3y - z + 2$ e il piano $\pi\ :\ x + z = 0$.

- Stabilire la posizione reciproca di r e π.
  Risposta La retta r è parallela al piano π ed è esterna ad esso __________ **(pt.1G)**
- Si determini un'equazione cartesiana della proiezione ortogonale di r su π.
  Risposta $x + 6y - z + 3 = 0 = x + z$ __________ **(pt.2G)**
- Si determini il raggio delle sfere che hanno centro su r e sono tangenti a π.
  Risposta $\frac{1}{\sqrt{2}}$ __________ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 31/01/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema $A_k X = B_k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, con

$$A_k = \begin{pmatrix} k-1 & k+1 \\ 0 & 1-k \\ -1 & k-1 \end{pmatrix}, \qquad B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}.$$

Si determinino:

- il numero di soluzioni del sistema, dopo aver indicato per quali valori di k è compatibile;
  Risposta Sistema compatibile solo per $k = 0, 1$ con soluzione unica in entrambi i casi ______ **(pt.3A)**
- i valori di k per i quali l'insieme delle soluzioni del sistema è un sottospazio di $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$;
  Risposta $k = 0$ ______ **(pt.1A)**
- posto $k = 1$, determinare l'insieme delle soluzioni del sistema $A_1 X = B_1$.
  Risposta $\{(-1; 0)\}$ ______ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 2. Si consideri, in $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ e al variare del parametro reale k (dove compare), i due sottospazi:

$$U_k = \mathcal{L}\left((2, 1, k+3, 0), (-1, 2, 0, k+3)\right), \qquad W = \mathcal{L}\left((2, 2, 0, 0), (-1, 0, 1, 0)\right).$$

Si determinino:

- la dimensione di U_k, al variare di $k \in \mathbb{R}$, e la dimensione di W;
  Risposta $\dim U_k = 2 \ \ \forall k \in \mathbb{R}$; $\dim W = 2$; ______ **(pt.2A)**
- i valori di k per i quali $U_k + W = \mathbb{R}^4$;
  Risposta $k \neq -4, -3$ ______ **(pt.2A)**
- i valori di k per i quali la somma $U_k \oplus W$ è diretta;
  Risposta $k \neq -4, -3$ ______ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette: $r \ : \ x + y = 0 = y - 2z$ ed $a \ : \ x - y = 0 = 2x + z$.

- Stabilire la posizione reciproca delle rette r e a.
  Risposta Le rette r e a sono incidenti nell'origine ______ **(pt.2G)**
- Detta $\mathcal{Q}$ la superficie generata dalla retta r nella rotazione di asse a, la si riconosca e se ne determinino gli eventuali punti multipli.
  Risposta Cono a falda reale con vertice $V(0; 0; 0)$ ______ **(pt.2G)**
- Stabilire la natura dei punti semplici di $\mathcal{Q}$.
  Risposta I punti semplici di $\mathcal{Q}$ sono parabolici ______ **(pt.1G)**

ESERCIZIO 4. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati la retta: $r \ : \ x + 2y - 4 = 0 = y + z$ e il piano $\pi \ : \ x - 2z = 0$.

- Stabilire la posizione reciproca di r e π.
  Risposta La retta r è parallela al piano π ed è esterna ad esso ______ **(pt.1G)**
- Si determini un'equazione cartesiana della proiezione ortogonale di r su π.
  Risposta $2x + 5y + z - 8 = 0 = x - 2z$ ______ **(pt.2G)**
- Si determini il raggio delle sfere che hanno centro su r e sono tangenti a π.
  Risposta $\frac{4}{\sqrt{5}}$ ______ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 31/01/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema $A_kX = B_k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, con

$$A_k = \begin{pmatrix} k & k-2 \\ 2-k & 0 \\ k-2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k-1 \end{pmatrix}.$$

Si determinino:

- il numero di soluzioni del sistema, dopo aver indicato per quali valori di k è compatibile;
  Risposta Sistema compatibile solo per $k = 1, 2$ con soluzione unica in entrambi i casi ________ **(pt.3A)**
- i valori di k per i quali l'insieme delle soluzioni del sistema è un sottospazio di $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$;
  Risposta $k = 1$ ________ **(pt.1A)**
- posto $k = 2$, determinare l'insieme delle soluzioni del sistema $A_2X = B_2$.
  Risposta $\{(0; -1)\}$ ________ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 2. Si consideri, in $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ e al variare del parametro reale k (dove compare), i due sottospazi:

$$U_k = \mathcal{L}\left((k-1, k-1, 0, 0), (-1, 0, k-2, 0)\right), \qquad W = \mathcal{L}\left((2, 1, 1, 0), (-1, 2, 0, 1)\right).$$

Si determinino:

- la dimensione di U_k, al variare di $k \in \mathbb{R}$, e la dimensione di W;
  Risposta $\dim U_k = 2$ se $k \neq 1$; $\dim U_1 = 1$; $\dim W = 2$ ________ **(pt.2A)**
- i valori di k per i quali $U_k + W = \mathbb{R}^4$;
  Risposta $k \neq 1$ ________ **(pt.2A)**
- i valori di k per i quali la somma $U_k \oplus W$ è diretta;
  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ ________ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette: $r \ : \ x + y = 0 = y - z$ ed $a \ : \ x - y = 0 = x + z$.

- Stabilire la posizione reciproca delle rette r e a.
  Risposta Le rette r e a sono incidenti nell'origine ________ **(pt.2G)**
- Detta $\mathcal{Q}$ la superficie generata dalla retta r nella rotazione di asse a, la si riconosca e se ne determinino gli eventuali punti multipli.
  Risposta Cono a falda reale con vertice $V(0; 0; 0)$ ________ **(pt.2G)**
- Stabilire la natura dei punti semplici di $\mathcal{Q}$.
  Risposta I punti semplici di $\mathcal{Q}$ sono parabolici ________ **(pt.1G)**

ESERCIZIO 4. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati la retta: $r \ : \ x + y + 7 = 0 = 3x + z$ e il piano $\pi \ : \ 3y - z = 0$.

- Stabilire la posizione reciproca di r e π.
  Risposta La retta r è parallela al piano π ed è esterna ad esso ________ **(pt.1G)**
- Si determini un'equazione cartesiana della proiezione ortogonale di r su π.
  Risposta $10x + y + 3z + 7 = 0 = 3y - z$ ________ **(pt.2G)**
- Si determini il raggio delle sfere che hanno centro su r e sono tangenti a π.
  Risposta $\frac{21}{\sqrt{10}}$ ________ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 31/01/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema $A_kX = B_k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, con

$$A_k = \begin{pmatrix} k-1 & k+1 \\ 0 & 1-k \\ -1 & k-1 \end{pmatrix}, \qquad B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k+1 \end{pmatrix}.$$

Si determinino:

- il numero di soluzioni del sistema, dopo aver indicato per quali valori di k è compatibile;
  Risposta Sistema compatibile solo per $k = -1, 1$ con soluzione unica in entrambi i casi ______ **(pt.3A)**
- i valori di k per i quali l'insieme delle soluzioni del sistema è un sottospazio di $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$;
  Risposta $k = -1$ ______ **(pt.1A)**
- posto $k = -1$, determinare l'insieme delle soluzioni del sistema $A_{-1}X = B_{-1}$.
  Risposta $\{(0; 0)\}$ ______ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 2. Si consideri, in $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ e al variare del parametro reale k (dove compare), i due sottospazi:

$$U_k = \mathcal{L}\left((2, 1, k-1, 0), (-1, 2, 0, k-1)\right), \qquad W = \mathcal{L}\left((-1, -1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0)\right).$$

Si determinino:

- la dimensione di U_k, al variare di $k \in \mathbb{R}$, e la dimensione di W;
  Risposta $\dim U_k = 2 \ \ \forall k \in \mathbb{R}$; $\dim W = 2$; ______ **(pt.2A)**
- i valori di k per i quali $U_k + W = \mathbb{R}^4$;
  Risposta $k \neq 0, 1$ ______ **(pt.2A)**
- i valori di k per i quali la somma $U_k \oplus W$ è diretta;
  Risposta $k \neq 0, 1$ ______ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette: $r \ : \ y + z = 0 = x - y$ ed $a \ : \ y - z = 0 = x + 2z$.

- Stabilire la posizione reciproca delle rette r e a.
  Risposta Le rette r e a sono incidenti nell'origine ______ **(pt.2G)**
- Detta $\mathcal{Q}$ la superficie generata dalla retta r nella rotazione di asse a, la si riconosca e se ne determinino gli eventuali punti multipli.
  Risposta Cono a falda reale con vertice $V(0; 0; 0)$ ______ **(pt.2G)**
- Stabilire la natura dei punti semplici di $\mathcal{Q}$.
  Risposta I punti semplici di $\mathcal{Q}$ sono parabolici ______ **(pt.1G)**

ESERCIZIO 4. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati la retta: $r \ : \ 3x + y - 3 = 0 = 3x - z + 2$ e il piano $\pi \ : \ y + z = 0$.

- Stabilire la posizione reciproca di r e π.
  Risposta La retta r è parallela al piano π ed è esterna ad esso ______ **(pt.1G)**
- Si determini un'equazione cartesiana della proiezione ortogonale di r su π.
  Risposta $6x + y - z - 1 = 0 = y + z$ ______ **(pt.2G)**
- Si determini il raggio delle sfere che hanno centro su r e sono tangenti a π.
  Risposta $\frac{5}{\sqrt{2}}$ ______ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 31/01/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema $A_k X = B_k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, con

$$A_k = \begin{pmatrix} k & k+2 \\ 0 & -k \\ -1 & k \end{pmatrix}, \qquad B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k+2 \end{pmatrix}.$$

Si determinino:

- il numero di soluzioni del sistema, dopo aver indicato per quali valori di k è compatibile;
  Risposta Sistema compatibile solo per $k = -2, 0$ con soluzione unica in entrambi i casi __________ **(pt.3A)**
- i valori di k per i quali l'insieme delle soluzioni del sistema è un sottospazio di $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$;
  Risposta $k = -2$ __________ **(pt.1A)**
- posto $k = 0$, determinare l'insieme delle soluzioni del sistema $A_0 X = B_0$.
  Risposta $\{(-2; 0)\}$ __________ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 2. Si consideri, in $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ e al variare del parametro reale k (dove compare), i due sottospazi:

$$U_k = \mathcal{L}\left((k-2, k-2, 0, 0), (-1, 0, k-3, 0)\right), \qquad W = \mathcal{L}\left((-2, -1, -1, 0), (1, -2, 0, -1)\right).$$

Si determinino:

- la dimensione di U_k, al variare di $k \in \mathbb{R}$, e la dimensione di W;
  Risposta $\dim U_k = 2$ se $k \neq 2$; $\dim U_2 = 1$; $\dim W = 2$ __________ **(pt.2A)**
- i valori di k per i quali $U_k + W = \mathbb{R}^4$;
  Risposta $k \neq 2$ __________ **(pt.2A)**
- i valori di k per i quali la somma $U_k \oplus W$ è diretta;
  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ __________ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette: $r \; : \; y + z = 0 = 2x - y$ ed $a \; : \; y - z = 0 = x + 2z$.

- Stabilire la posizione reciproca delle rette r e a.
  Risposta Le rette r e a sono incidenti nell'origine __________ **(pt.2G)**
- Detta $\mathcal{Q}$ la superficie generata dalla retta r nella rotazione di asse a, la si riconosca e se ne determinino gli eventuali punti multipli.
  Risposta Cono a falda reale con vertice $V(0; 0; 0)$ __________ **(pt.2G)**
- Stabilire la natura dei punti semplici di $\mathcal{Q}$.
  Risposta I punti semplici di $\mathcal{Q}$ sono parabolici __________ **(pt.1G)**

ESERCIZIO 4. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati la retta: $r \; : \; 2x + y - 3 = 0 = x + z$ e il piano $\pi \; : \; y - 2z = 0$.

- Stabilire la posizione reciproca di r e π.
  Risposta La retta r è parallela al piano π ed è esterna ad esso __________ **(pt.1G)**
- Si determini un'equazione cartesiana della proiezione ortogonale di r su π.
  Risposta $5x + 2y + z - 6 = 0 = y - 2z$ __________ **(pt.2G)**
- Si determini il raggio delle sfere che hanno centro su r e sono tangenti a π.
  Risposta $\frac{3}{\sqrt{5}}$ __________ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 31/01/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema $A_kX = B_k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, con

$$A_k = \begin{pmatrix} k & k-2 \\ 2-k & 0 \\ k-2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}.$$

Si determinino:

- il numero di soluzioni del sistema, dopo aver indicato per quali valori di k è compatibile;
  Risposta Sistema compatibile solo per $k = 0, 2$ con soluzione unica in entrambi i casi ________ **(pt.3A)**
- i valori di k per i quali l'insieme delle soluzioni del sistema è un sottospazio di $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$;
  Risposta $k = 0$ ________ **(pt.1A)**
- posto $k = 2$, determinare l'insieme delle soluzioni del sistema $A_2X = B_2$.
  Risposta $\{(0; -2)\}$ ________ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 2. Si consideri, in $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ e al variare del parametro reale k (dove compare), i due sottospazi:

$$U_k = \mathcal{L}\left((2, 1, -k, 0), (-1, 2, 0, -k)\right), \qquad W = \mathcal{L}\left((-2, -2, 0, 0), (-1, 0, 1, 0)\right).$$

Si determinino:

- la dimensione di U_k, al variare di $k \in \mathbb{R}$, e la dimensione di W;
  Risposta $\dim U_k = 2 \ \ \forall k \in \mathbb{R}$; $\dim W_k = 2$; ________ **(pt.2A)**
- i valori di k per i quali $U_k + W = \mathbb{R}^4$;
  Risposta $k \neq 0, 1$ ________ **(pt.2A)**
- i valori di k per i quali la somma $U_k \oplus W$ è diretta;
  Risposta $k \neq 0, 1$ ________ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette: $r \ : \ y + z = 0 = x - y$ ed $a \ : \ y - z = 0 = x + z$.

- Stabilire la posizione reciproca delle rette r e a.
  Risposta Le rette r e a sono incidenti nell'origine ________ **(pt.2G)**
- Detta $\mathcal{Q}$ la superficie generata dalla retta r nella rotazione di asse a, la si riconosca e se ne determinino gli eventuali punti multipli.
  Risposta Cono a falda reale con vertice $V(0; 0; 0)$ ________ **(pt.2G)**
- Stabilire la natura dei punti semplici di $\mathcal{Q}$.
  Risposta I punti semplici di $\mathcal{Q}$ sono parabolici ________ **(pt.1G)**

ESERCIZIO 4. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati la retta: $r \ : \ x + y + 2 = 0 = 3y + z$ e il piano $\pi \ : \ 3x - z = 0$.

- Stabilire la posizione reciproca di r e π.
  Risposta La retta r è parallela al piano π ed è esterna ad esso ________ **(pt.1G)**
- Si determini un'equazione cartesiana della proiezione ortogonale di r su π.
  Risposta $x + 10y + 3z + 2 = 0 = 3x - z$ ________ **(pt.2G)**
- Si determini il raggio delle sfere che hanno centro su r e sono tangenti a π.
  Risposta $\frac{6}{\sqrt{10}}$ ________ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 31/01/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema $A_kX = B_k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, con

$$A_k = \begin{pmatrix} k & k+2 \\ 0 & -k \\ -1 & k \end{pmatrix}, \qquad B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k+3 \end{pmatrix}.$$

Si determinino:

- il numero di soluzioni del sistema, dopo aver indicato per quali valori di k è compatibile;
  Risposta Sistema compatibile solo per $k = -3, 0$ con soluzione unica in entrambi i casi ________ **(pt.3A)**
- i valori di k per i quali l'insieme delle soluzioni del sistema è un sottospazio di $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$;
  Risposta $k = -3$ ________ **(pt.1A)**
- posto $k = 0$, determinare l'insieme delle soluzioni del sistema $A_0X = B_0$.
  Risposta $\{(-3; 0)\}$ ________ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 2. Si consideri, in $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ e al variare del parametro reale k (dove compare), i due sottospazi:

$$U_k = \mathcal{L}\left((k+3, k+3, 0, 0), (-1, 0, k+2, 0)\right), \qquad W = \mathcal{L}\left((-2, -1, -1, 0), (-1, 2, 0, 1)\right).$$

Si determinino:

- la dimensione di U_k, al variare di $k \in \mathbb{R}$, e la dimensione di W;
  Risposta $\dim U_k = 2$ se $k \neq -3$; $\dim U_{-3} = 1$; $\dim W = 2$ ________ **(pt.2A)**
- i valori di k per i quali $U_k + W = \mathbb{R}^4$;
  Risposta $k \neq -3$ ________ **(pt.2A)**
- i valori di k per i quali la somma $U_k \oplus W$ è diretta;
  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ ________ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette: $r : x + z = 0 = y - z$ ed $a : x - z = 0 = 2x + y$.

- Stabilire la posizione reciproca delle rette r e a.
  Risposta Le rette r e a sono incidenti nell'origine ________ **(pt.2G)**
- Detta $\mathcal{Q}$ la superficie generata dalla retta r nella rotazione di asse a, la si riconosca e se ne determinino gli eventuali punti multipli.
  Risposta Cono a falda reale con vertice $V(0; 0; 0)$ ________ **(pt.2G)**
- Stabilire la natura dei punti semplici di $\mathcal{Q}$.
  Risposta I punti semplici di $\mathcal{Q}$ sono parabolici ________ **(pt.1G)**

ESERCIZIO 4. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati la retta: $r : x + 3z - 5 = 0 = y - 3z - 2$ e il piano $\pi : x + y = 0$.

- Stabilire la posizione reciproca di r e π.
  Risposta La retta r è parallela al piano π ed è esterna ad esso ________ **(pt.1G)**
- Si determini un'equazione cartesiana della proiezione ortogonale di r su π.
  Risposta $x - y + 6z - 3 = 0 = x + y$ ________ **(pt.2G)**
- Si determini il raggio delle sfere che hanno centro su r e sono tangenti a π.
  Risposta $\frac{7}{\sqrt{2}}$ ________ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 31/01/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema $A_kX = B_k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, con

$$A_k = \begin{pmatrix} k-1 & k+1 \\ 0 & 1-k \\ -1 & k-1 \end{pmatrix}, \qquad B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k+2 \end{pmatrix}.$$

Si determinino:

- il numero di soluzioni del sistema, dopo aver indicato per quali valori di k è compatibile;
  Risposta Sistema compatibile solo per $k = -2, 1$ con soluzione unica in entrambi i casi ______ **(pt.3A)**
- i valori di k per i quali l'insieme delle soluzioni del sistema è un sottospazio di $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$;
  Risposta $k = -2$ ______ **(pt.1A)**
- posto $k = -2$, determinare l'insieme delle soluzioni del sistema $A_{-2}X = B_{-2}$.
  Risposta $\{(0; 0)\}$ ______ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 2. Si consideri, in $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ e al variare del parametro reale k (dove compare), i due sottospazi:

$$U_k = \mathcal{L}\left((2, 1, k+4, 0), (-1, 2, 0, k+4)\right), \qquad W = \mathcal{L}\left((3, 3, 0, 0), (-1, 0, 1, 0)\right).$$

Si determinino:

- la dimensione di U_k, al variare di $k \in \mathbb{R}$, e la dimensione di W;
  Risposta $\dim U_k = 2 \ \ \forall k \in \mathbb{R}$; $\dim W = 2$; ______ **(pt.2A)**
- i valori di k per i quali $U_k + W = \mathbb{R}^4$;
  Risposta $k \neq -5, -4$ ______ **(pt.2A)**
- i valori di k per i quali la somma $U_k \oplus W$ è diretta;
  Risposta $k \neq -5, -4$ ______ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette: $r \ : \ x + z = 0 = 2y - z$ ed $a \ : \ x - z = 0 = 2x + y$.

- Stabilire la posizione reciproca delle rette r e a.
  Risposta Le rette r e a sono incidenti nell'origine ______ **(pt.2G)**
- Detta $\mathcal{Q}$ la superficie generata dalla retta r nella rotazione di asse a, la si riconosca e se ne determinino gli eventuali punti multipli.
  Risposta Cono a falda reale con vertice $V(0; 0; 0)$ ______ **(pt.2G)**
- Stabilire la natura dei punti semplici di $\mathcal{Q}$.
  Risposta I punti semplici di $\mathcal{Q}$ sono parabolici ______ **(pt.1G)**

ESERCIZIO 4. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati la retta: $r \ : \ x + 2z - 5 = 0 = y + z$ e il piano $\pi \ : \ x - 2y = 0$.

- Stabilire la posizione reciproca di r e π.
  Risposta La retta r è parallela al piano π ed è esterna ad esso ______ **(pt.1G)**
- Si determini un'equazione cartesiana della proiezione ortogonale di r su π.
  Risposta $2x + y + 5z - 10 = 0 = x - 2y$ ______ **(pt.2G)**
- Si determini il raggio delle sfere che hanno centro su r e sono tangenti a π.
  Risposta $\frac{5}{\sqrt{5}}$ ______ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BRESCIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 31/01/2022

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema $A_kX = B_k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, con

$$A_k = \begin{pmatrix} k & k-2 \\ 2-k & 0 \\ k-2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k+1 \end{pmatrix}.$$

Si determinino:

- il numero di soluzioni del sistema, dopo aver indicato per quali valori di k è compatibile;
  Risposta Sistema compatibile solo per $k = -1, 2$ con soluzione unica in entrambi i casi ______ **(pt.3A)**
- i valori di k per i quali l'insieme delle soluzioni del sistema è un sottospazio di $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$;
  Risposta $k = -1$ ______ **(pt.1A)**
- posto $k = 2$, determinare l'insieme delle soluzioni del sistema $A_2X = B_2$.
  Risposta $\{(0; -3)\}$ ______ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 2. Si consideri, in $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ e al variare del parametro reale k (dove compare), i due sottospazi:

$$U_k = \mathcal{L}\left((k+2, k+2, 0, 0), (-1, 0, k+1, 0)\right), \qquad W = \mathcal{L}\left((2, 1, 1, 0), (1, -2, 0, -1)\right).$$

Si determinino:

- la dimensione di U_k, al variare di $k \in \mathbb{R}$, e la dimensione di W;
  Risposta $\dim U_k = 2$ se $k \neq -2$; $\dim U_{-2} = 1$; $\dim W = 2$ ______ **(pt.2A)**
- i valori di k per i quali $U_k + W = \mathbb{R}^4$;
  Risposta $k \neq -2$ ______ **(pt.2A)**
- i valori di k per i quali la somma $U_k \oplus W$ è diretta;
  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette: $r : x + z = 0 = y - z$ ed $a : x - z = 0 = x + y$.

- Stabilire la posizione reciproca delle rette r e a.
  Risposta Le rette r e a sono incidenti nell'origine ______ **(pt.2G)**
- Detta $\mathcal{Q}$ la superficie generata dalla retta r nella rotazione di asse a, la si riconosca e se ne determinino gli eventuali punti multipli.
  Risposta Cono a falda reale con vertice $V(0; 0; 0)$ ______ **(pt.2G)**
- Stabilire la natura dei punti semplici di $\mathcal{Q}$.
  Risposta I punti semplici di $\mathcal{Q}$ sono parabolici ______ **(pt.1G)**

ESERCIZIO 4. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati la retta: $r : x + z + 4 = 0 = 3x + y$ e il piano $\pi : y - 3z = 0$.

- Stabilire la posizione reciproca di r e π.
  Risposta La retta r è parallela al piano π ed è esterna ad esso ______ **(pt.1G)**
- Si determini un'equazione cartesiana della proiezione ortogonale di r su π.
  Risposta $10x + 3y + z + 4 = 0 = y - 3z$ ______ **(pt.2G)**
- Si determini il raggio delle sfere che hanno centro su r e sono tangenti a π.
  Risposta $\frac{12}{\sqrt{10}}$ ______ **(pt.2G)**