UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2° test - 23.12.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -k \\ k+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -k \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale.

- Si discuta al variare di $k \in \mathbb{R}$ la risolubilità del sistema lineare $AX = B$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;

  Risposta $k = 0$ incompatibile, $k = 1$ ∞^1 soluz., $k \neq 0, 1$ soluz. unica ______ **(pt.3)**

- interpretando x, y e z come coordinate dello spazio affine reale $\mathbb{A}_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un sistema di riferimento affine si discuta al variare di $k \in \mathbb{R}$ la mutua posizione dei tre piani rappresentati dalle equazioni del sistema lineare.

  Risposta $k = 0$ piani a due a due incidenti, $k = 1$ fascio proprio, $k \neq 0, 1$ stella propria _ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano si considerino le rette $r_k : \begin{cases} x - 2y = k \\ y - z = -2 \end{cases}$ ed $a_k : \begin{cases} x + y = 0 \\ x + kz = 2 \end{cases}$, il punto $P = (1, 1, -1)$ ed il piano $\pi : x - y + 2z - 1 = 0$. Si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui le due rette r_k ed a_k risultano sghembe;

  Risposta $k \neq 1, 6$ ______ **(pt.2)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui le due rette r_k ed a_k sono incidenti perpendicolari;

  Risposta $k = 1$ ______ **(pt.2)**

- un'equazione cartesiana della retta passante per P e perpendicolare a π;

  Risposta $x + y - 2 = 0 = 2x - z - 3$ ______ **(pt.2)**

- posto $k = 0$ un'equazione cartesiana del piano contenente la retta r_0 e perpendicolare a π;

  Risposta $x - y - z + 2 = 0$ ______ **(pt.2)**

- posto $k = 0$ un'equazione cartesiana del luogo descritto dai punti della retta r_0 nella rotazione di asse a_0; si riconosca inoltre tale luogo.

  Risposta $x^2 + y^2 - 5z^2 - 4x + 4y + 24z - 28 = 0$, iperboloide iperbolico ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{R})$ si consideri la conica $\mathcal{C} :\ x^2 - y^2 + 4x + 2y + 1 = 0$. Si riconosca la conica $\mathcal{C}$ e si determinino, se esistono e sono reali, centro, assi, asintoti e vertici.

Risposta Iperbole equilatera, centro $C = (-2, 1)$, asintoti: $x - y + 3 = 0$, $x + y + 1 = 0$,
assi: $y - 1 = 0$, $x + 2 = 0$, vertici $V_1 = (-2 + \sqrt{2}, 1)$, $V_2 = (-2 - \sqrt{2}, 1)$ ______ **(pt.6)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q} :\ x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 2z = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$ e si determinino i suoi eventuali punti doppi;

  Risposta Cono con vertice $V = (1, 0, -1)$ ______ **(pt.3)**

- si riconoscano le tre coniche ottenute come sezione di $\mathcal{Q}$ con i piani coordinati.

  Risposta $x = 0 :$ iperbole, $y = 0 :$ rette distinte, $z = 0 :$ ellisse ______ **(pt.3)**

2

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2° test - 23.12.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 0 & k+1 & 2 \\ 1 & k+2 & 2 \\ 1 & 1 & -k \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -k-1 \\ -2 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale.

- Si discuta al variare di $k \in \mathbb{R}$ la risolubilità del sistema lineare $AX = B$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;

  Risposta $k = -1$ incompatibile, $k = 0$ ∞^1 soluz., $k \neq -1, 0$ soluz. unica ______ **(pt.3)**

- interpretando x, y e z come coordinate dello spazio affine reale $\mathbb{A}_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un sistema di riferimento affine si discuta al variare di $k \in \mathbb{R}$ la mutua posizione dei tre piani rappresentati dalle equazioni del sistema lineare.

  Risposta $k = -1$ piani a due a due incidenti, $k = 0$ fascio proprio, $k \neq -1, 0$ stella propria _ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano si considerino le rette $r_k : \begin{cases} 2x - y = k \\ x - z = -3 \end{cases}$ ed $a_k : \begin{cases} x + y = 0 \\ y + kz = 2 + k \end{cases}$, il punto $P = (1, 1, 0)$ ed il piano $\pi : x - y - 2z + 3 = 0$. Si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui le due rette r_k ed a_k risultano sghembe;

  Risposta $k \neq -6, 1$ ______ **(pt.2)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui le due rette r_k ed a_k sono incidenti perpendicolari;

  Risposta $k = 1$ ______ **(pt.2)**

- un'equazione cartesiana della retta passante per P e perpendicolare a π;

  Risposta $x + y - 2 = 0 = 2x + z - 2$ ______ **(pt.2)**

- posto $k = 0$ un'equazione cartesiana del piano contenente la retta r_0 e perpendicolare a π;

  Risposta $x - y + z - 3 = 0$ ______ **(pt.2)**

- posto $k = 0$ un'equazione cartesiana del luogo descritto dai punti della retta r_0 nella rotazione di asse a_0; si riconosca inoltre tale luogo.

  Risposta $x^2 + y^2 - 5z^2 + 4x - 4y + 34z - 57 = 0$, iperboloide iperbolico ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{R})$ si consideri la conica $\mathcal{C} :\ x^2 - y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$. Si riconosca la conica $\mathcal{C}$ e si determinino, se esistono e sono reali, centro, assi, asintoti e vertici.

Risposta Iperbole equilatera, centro $C = (2, -3)$, asintoti: $x - y - 5 = 0$, $x + y + 1 = 0$,
assi: $y + 3 = 0$, $x - 2 = 0$, vertici $V_1 = (2, -3 + \sqrt{2})$, $V_2 = (2, -3 - \sqrt{2}, 1)$ ______ **(pt.6)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q} :\ x^2 + y^2 - z^2 - 2y - 4z - 3 = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$ e si determinino i suoi eventuali punti doppi;

  Risposta Cono con vertice $V = (0, 1, -2)$ ______ **(pt.3)**

- si riconoscano le tre coniche ottenute come sezione di $\mathcal{Q}$ con i piani coordinati.

  Risposta $x = 0 :$ rette distinte, $y = 0 :$ iperbole, $z = 0 :$ ellisse ______ **(pt.3)**