1

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 19.11.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino, al variare del parametro reale k, le matrici

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ k+1 & 1 & 0 \\ k & 1 & -k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ k-2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- il rango della matrice A;
  Risposta $k \neq \pm 1 \quad \rho(A) = 3, \qquad k = \pm 1 \quad \rho(A) = 2$ **(pt.1)**
- il rango della matrice $A|B$;
  Risposta $k \neq 1 \quad \rho(A|B) = 3, \qquad k = 1 \quad \rho(A|B) = 2$ **(pt.1)**
- i valori di k per cui il sistema $AX = B$ è compatibile e, per tali valori, il numero delle soluzioni;
  Risposta $k \neq -1$; $\quad k \neq \pm 1$ soluz. unica, $\quad k = 1 \quad \infty^1$ soluz. **(pt.4)**
- posto $k = 1$ l'insieme S delle soluzioni di $AX = B$;
  Risposta $S = \{(\alpha, -2\alpha, 1-\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; z = 0 \quad \text{e} \quad 2x + y - 2t = 0 \right\}, \qquad A_k = \begin{pmatrix} k-2 & 2 \\ k+1 & -2 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determino:

- una base $\mathcal{B}$ e la dimensione di U;
  Risposta $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$; $\dim U = 2$ **(pt.2)**
- i valori di k per cui la matrice A_k appartiene ad U.
  Risposta $k = -1$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U = \mathcal{L}([(1,0,0,1), (-2,1,0,k-2), (-k,k,0,k)])$ e $W = \{(2\alpha + 2\gamma, 0, -\alpha + 2\beta + 3\gamma, \alpha + \gamma) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$. Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$

- la dimensione di U e una sua base;
  Risposta $k \neq 0$ e $k \neq 2 \quad \dim U = 3,\ \mathcal{B}_U = ((1,0,0,1), (-2,1,0,k-2), (-k,k,0,k))$,
  $k = 0$ o $k = 2 \quad \dim(U) = 2,\ \mathcal{B}_U = ((1,0,0,1), (-2,1,0,k-2))$ **(pt.3)**
- una base ortonormale di W;
  Risposta $\mathcal{B}_W = \left((0,0,1,0), (2/\sqrt{5}, 0, 0, 1/\sqrt{5})\right)$ **(pt.2)**
- i valori di k per cui la somma $U + W$ risulta diretta;
  Risposta $k = 0$ o $k = 2$ **(pt.2)**
- il complemento ortogonale di W.
  Risposta $W^\perp = \mathcal{L}((1,0,0,-2), (0,1,0,0))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & k & k \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;
  Risposta $k \neq \pm 1 \quad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = k, \quad a_\lambda = g_\lambda = 1$
  $k = -1 \quad a_{-1} = g_{-1} = 2,\ a_1 = g_1 = 1$
  $k = 1 \quad a_{-1} = g_{-1} = 1,\ a_1 = 2,\ g_1 = 1$ **(pt.3)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq 1$ **(pt.2)**
- posto $k = -1$ una matrice D diagonale simile ad A_{-1} e la matrice diagonalizzante P.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

2

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 19.11.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino, al variare del parametro reale k, le matrici

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ k+2 & 1 & 0 \\ 2k+2 & 1 & -k-1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k+1 \\ 0 \\ k-1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- il rango della matrice A;
  Risposta $k \neq -2, 0 \quad \rho(A) = 3, \qquad k = -2, 0 \quad \rho(A) = 2$ **(pt.1)**
- il rango della matrice $A|B$;
  Risposta $k \neq 0 \quad \rho(A|B) = 3, \qquad k = 0 \quad \rho(A|B) = 2$ **(pt.1)**
- i valori di k per cui il sistema $AX = B$ è compatibile e, per tali valori, il numero delle soluzioni;
  Risposta $k \neq -2$; $\quad k \neq -2, 0$ soluz. unica, $\quad k = 0 \quad \infty^1$ soluz. **(pt.4)**
- posto $k = 0$ l'insieme S delle soluzioni di $AX = B$;
  Risposta $S = \{(\alpha, -2\alpha, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; y = 0 \quad \text{e} \quad 2x + z - 2t = 0 \right\}, \qquad A_k = \begin{pmatrix} k-3 & k \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- una base $\mathcal{B}$ e la dimensione di U;
  Risposta $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right)$; $\quad \dim U = 2$ **(pt.2)**
- i valori di k per cui la matrice A_k appartiene ad U.
  Risposta $k = 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U = \mathcal{L}([(1,0,0,1), (k-1, -k, 0, -2), (-2, 1, 0, k-1)])$ e $W = \{(2\alpha + 2\gamma, 0, -\alpha + 3\beta - 2\gamma, \alpha + \gamma) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$. Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$

- la dimensione di U e una sua base;
  Risposta $k \neq \pm 1 \quad \dim U = 3,\ \mathcal{B}_U = ((1,0,0,1), (k-1, -k, 0, -2), (-2, 1, 0, k-1)),$
  $k = -1$ o $k = 1 \quad \dim(U) = 2,\ \mathcal{B}_U = ((1,0,0,1), (k-1, -k, 0, -2))$ **(pt.3)**
- una base ortonormale di W;
  Risposta $\mathcal{B}_W = \left((0,0,1,0), (2/\sqrt{5}, 0, 0, 1/\sqrt{5})\right)$ **(pt.2)**
- i valori di k per cui la somma $U + W$ risulta diretta;
  Risposta $k = -1$ o $k = 1$ **(pt.2)**
- il complemento ortogonale di W.
  Risposta $W^\perp = \mathcal{L}((1,0,0,-2), (0,1,0,0))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & k+2 & 0 \\ 4 & k+2 & 2 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;
  Risposta $k \neq -2$ e $k \neq 0 \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = k+2, \quad a_\lambda = g_\lambda = 1$
  $k = 0 \quad a_2 = g_2 = 2,\ a_0 = g_0 = 1$
  $k = -2 \quad a_2 = g_2 = 1,\ a_0 = 2,\ g_0 = 1$ **(pt.3)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq -2$ **(pt.2)**
- posto $k = 0$ una matrice D diagonale simile ad A_0 e la matrice diagonalizzante P.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 19.11.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino, al variare del parametro reale k, le matrici

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ k-1 & 0 & 1 \\ k-1 & 1 & 1-k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ k-1 \\ k-3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- il rango della matrice A;
  Risposta $k \neq 0$ e $k \neq 2$ $\rho(A) = 3$, $k = 0$ o $k = 2$ $\rho(A) = 2$ __________ **(pt.1)**
- il rango della matrice $A|B$;
  Risposta $k \neq 2$ $\rho(A|B) = 3$, $k = 2$ $\rho(A|B) = 2$ __________ **(pt.1)**
- i valori di k per cui il sistema $AX = B$ è compatibile e, per tali valori, il numero delle soluzioni;
  Risposta $k \neq 0$; $k \neq 0, 2$ soluz. unica, $k = 2$ ∞^1 soluz. __________ **(pt.4)**
- posto $k = 2$ l'insieme S delle soluzioni di $AX = B$;
  Risposta $S = \{(\alpha, -2\alpha, 1-\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ __________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ si considerino

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; z = 0 \quad \text{e} \quad 2x - y - 2t = 0 \right\}, \qquad A_k = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ k+2 & k-1 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- una base $\mathcal{B}$ e la dimensione di U;
  Risposta $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$; $\dim U = 2$ __________ **(pt.2)**
- i valori di k per cui la matrice A_k appartiene ad U.
  Risposta $k = -2$ __________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U = \mathcal{L}([(-1,1,0,k-1), (-2,1,0,k-2), (1-k,k,0,1+k)])$ e $W = \{(2\alpha - 4\gamma, 0, \alpha + \beta, \alpha - 2\gamma) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$. Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$

- la dimensione di U e una sua base;
  Risposta $k \neq 0$ e $k \neq 2$ $\dim U = 3$, $\mathcal{B}_U = ((-1,1,0,k-1), (-2,1,0,k-2), (1-k,k,0,1+k))$,
  $k = 0$ o $k = 2$ $\dim(U) = 2$, $\mathcal{B}_U = ((-1,1,0,k-1), (-2,1,0,k-2))$ __________ **(pt.3)**
- una base ortonormale di W;
  Risposta $\mathcal{B}_W = \left((0,0,1,0), (2/\sqrt{5}, 0, 0, 1/\sqrt{5})\right)$ __________ **(pt.2)**
- i valori di k per cui la somma $U + W$ risulta diretta;
  Risposta $k = 0$ o $k = 2$ __________ **(pt.2)**
- il complemento ortogonale di W.
  Risposta $W^\perp = \mathcal{L}((1,0,0,-2), (0,1,0,0))$ __________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k+1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;
  Risposta $k \neq -1, 0$ $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = k+1$, $a_\lambda = g_\lambda = 1$
  $k = 0$ $a_1 = 2$, $g_1 = 1$, $a_0 = g_0 = 1$
  $k = -1$ $a_1 = g_1 = 1$, $a_0 = 2$, $g_0 = 1$ __________ **(pt.3)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq -1, 0$ __________ **(pt.2)**
- posto $k = 0$ una matrice D diagonale simile ad A_0 e la matrice diagonalizzante P.
  Risposta Per $k = 0$ la matrice A_0 non è diagonalizzabile. __________ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o test - 19.11.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino, al variare del parametro reale k, le matrici

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ k+1 & -k & 1 \\ k+2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k \\ k-2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Si determini al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- il rango della matrice A;
  Risposta $k \neq \pm 1 \quad \rho(A) = 3, \qquad k = \pm 1 \quad \rho(A) = 2$ **(pt.1)**
- il rango della matrice $A|B$;
  Risposta $k \neq 1 \quad \rho(A|B) = 3, \qquad k = 1 \quad \rho(A|B) = 2$ **(pt.1)**
- i valori di k per cui il sistema $AX = B$ è compatibile e, per tali valori, il numero delle soluzioni;
  Risposta $k \neq -1$; $\quad k \neq \pm 1$ soluz. unica, $\quad k = 1 \quad \infty^1$ soluz. **(pt.4)**
- posto $k = 1$ l'insieme S delle soluzioni di $AX = B$;
  Risposta $S = \{(\alpha, 1-\alpha, -3\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ si considerino

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; y = 0 \quad \text{e} \quad 2x - z - 2t = 0 \right\}, \qquad A_k = \begin{pmatrix} -2 & k+1 \\ 2 & k-2 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino:

- una base $\mathcal{B}$ e la dimensione di U;
  Risposta $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right)$; $\dim U = 2$ **(pt.2)**
- i valori di k per cui la matrice A_k appartiene ad U.
  Risposta $k = -1$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi $U = \mathcal{L}([(1,0,0,1), (k-2, 1-k, 0, -2), (k, -k, 0, -k)])$ e $W = \{(2\alpha + 2\gamma, 0, -\alpha - \beta - 2\gamma, \alpha + \gamma) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$. Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$

- la dimensione di U e una sua base;
  Risposta $k \neq 0$ e $k \neq 2 \quad \dim U = 3,\ \mathcal{B}_U = ((1,0,0,1), (k-2, 1-k, 0, -2), (k, -k, 0, -k))$,
  $k = 0$ o $k = 2 \quad \dim(U) = 2,\ \mathcal{B}_U = ((1,0,0,1), (k-2, 1-k, 0, -2))$ **(pt.3)**
- una base ortonormale di W;
  Risposta $\mathcal{B}_W = \left((0,0,1,0), (2/\sqrt{5}, 0, 0, 1/\sqrt{5})\right)$ **(pt.2)**
- i valori di k per cui la somma $U + W$ risulta diretta;
  Risposta $k = 0$ o $k = 2$ **(pt.2)**
- il complemento ortogonale di W.
  Risposta $W^\perp = \mathcal{L}((1,0,0,-2), (0,1,0,0))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & k-1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k-1 & 2 \end{pmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Si determinino, al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;
  Risposta $k \neq 1, 2 \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = k, \quad a_\lambda = g_\lambda = 1$
  $k = 1 \quad a_1 = g_1 = 2,\ a_2 = g_2 = 1$
  $k = 2 \quad a_1 = g_1 = 1,\ a_2 = 2,\ g_2 = 1$ **(pt.3)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq 2$ **(pt.2)**
- posto $k = 1$ una matrice D diagonale simile ad A_1 e la matrice diagonalizzante P.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**