A

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 2.11.12

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $M_2(\mathbb{R})$ si consideri il sottospazio vettoriale $W = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) | x+y=-1, z=0\right\}\right)$. Si determinino:

- una base B di W e la sua dimensione;

  Risposta $B_W = \left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $dim\ W = 3$ **(pt.3)**
- le componenti di $v = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base trovata;

  Risposta $(3, 2, 1)$ **(pt.2)**
- un complemento diretto di W.

  Risposta $\mathcal{L}\left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)\right)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, si consideri il sottospazio vettoriale $U = \{(a+c, b+2c, a+b+3c) \in \mathbb{R}^3(\mathbb{R}), a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Si determinino:

- una base B' del complemento ortogonale di U;

  Risposta $B' = ((-1, -1, 1))$ **(pt.3)**
- i coefficienti di Fourier e le proiezioni di $v = (0, 5, 1)$ lungo i vettori di B'.

  Risposta $v_{e_1} = -4/3$, $\vec{v}_{e_1} = -\frac{4}{3}(-1, -1, 1)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali di k il vettore $v = (1, k-1, 2, 2)$ appartiene alla chiusura di $S = [(k-1, 1, 1, 1), (0, 0, 0, k-1), (2k-2, 1, 2, k)] \subseteq \mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.

Risposta $k = 3/2$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri il sistema $A_k X = B_k$ con

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & -k & k+1 \\ k+1 & 1 & 3-k \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.

  Risposta $k \neq 0, 1$ una sola soluzione, $k = 1$ ∞^1 soluzioni **(pt.4)**
- Posto $k = 1$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $A_1 X = B_1$.

  Risposta $\mathcal{I} = \{(a, 1-a, -a/2) \in \mathbb{R}^3,\ a \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Sia data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ k^2-9 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- Si dica per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.

  Risposta $k \neq -2, 4$ **(pt.3)**
- Posto $k = 3$
  - si trovino una matrice diagonale simile ad A_3 e la relativa matrice diagonalizzante.

    Risposta $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**
  - Si dica se esiste una diagonalizzante ortogonale (motivare la risposta) e, se è il caso, la si determini.

    Risposta Una matrice diagonalizzante ortogonale esiste poichè A_3 è reale e simmetrica:

    $P' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

B

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 2.11.12

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $M_2(\mathbb{R})$ si consideri il sottospazio vettoriale $W = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) | z+t=1, x=0\right\}\right)$. Si determinino:

- una base B di W e la sua dimensione;

 Risposta $B_W = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $dim\ W = 3$ **(pt.3)**

- le componenti di $v = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base trovata;

 Risposta $(-2, 0, -1)$ **(pt.2)**

- un complemento diretto di W.

 Risposta $\mathcal{L}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, si consideri il sottospazio vettoriale $U = \{(a+b, b+c, a+b) \in \mathbb{R}^3(\mathbb{R}), a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Si determinino:

- una base B' del complemento ortogonale di U;

 Risposta $B' = ((1, 0, -1))$ **(pt.3)**

- i coefficienti di Fourier e le proiezioni di $v = (2, 2, 1)$ lungo i vettori di B'.

 Risposta $v_{e_1} = 1/2$, $\vec{v}_{e_1} = \frac{1}{2}(1, 0, -1)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali di k il vettore $v = (0, k, 5, -1)$ appartiene alla chiusura di $S = [(1, 1, 1, k), (k, 0, 0, 0), (k, 0, 1, k)] \subseteq \mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.

Risposta $k = -1/5$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri il sistema $A_k X = B_k$ con

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & k^2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} k+3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.

 Risposta $k \neq 1, -2$ una sola soluzione, $k = -2$ ∞^1 soluzioni **(pt.4)**

- Posto $k = -2$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $A_{-2}X = B_{-2}$.

 Risposta $\mathcal{I} = \{(1-a, -a, a) \in \mathbb{R}^3,\ a \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Sia data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ k^2-1 & 0 & k \end{pmatrix}$$

- Si dica per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.

 Risposta $k \neq 0, 5$ **(pt.3)**

- Posto $k = 1$

 – si trovino una matrice diagonale simile ad A_1 e la relativa matrice diagonalizzante.

 Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

 – Si dica se esiste una diagonalizzante ortogonale (motivare la risposta) e, se è il caso, la si determini.

 Risposta Una matrice diagonalizzante ortogonale esiste poichè A_1 è reale e simmetrica:

$$P' = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ **(pt.3)**

C

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 2.11.12

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 6. In $M_2(\mathbb{R})$ si consideri il sottospazio vettoriale $W = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) | x+y=1, t=0\right\}\right)$. Si determinino:

- una base B di W e la sua dimensione;
  Risposta $B_W = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $\quad dim\ W = 3$ **(pt.3)**
- le componenti di $v = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base trovata;
  Risposta $(4, 1, -2)$ **(pt.2)**
- un complemento diretto di W.
  Risposta $\mathcal{L}\left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\right)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 7. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, si consideri il sottospazio vettoriale $U = \{(a-c, b+c, b+a) \in \mathbb{R}^3(\mathbb{R}), a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Si determinino:

- una base B' del complemento ortogonale di U;
  Risposta $B' = ((1, 1, -1))$ **(pt.3)**
- i coefficienti di Fourier e le proiezioni di $v = (1, 2, 1)$ lungo i vettori di B'.
  Risposta $v_{e_1} = 2/3$, $\quad \vec{v}_{e_1} = \frac{2}{3}(1, 1, -1)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 8. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali di k il vettore $v = (2, k, 2, 1)$ appartiene alla chiusura di $S = [(1, 1, 1, k), (k, 0, 0, 0), (k, 0, 1, k)] \subseteq \mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.

Risposta $k = 1/2$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 9. Si consideri il sistema $A_k X = B_k$ con

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 4 \\ 1-k & 0 & k \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} k-1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta $k \neq 1, 2$ una sola soluzione, $\quad k = 2$ ∞^1 soluzioni **(pt.4)**
- Posto $k = 2$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $A_2 X = B_2$.
  Risposta $\mathcal{I} = \{(1+2a, -3a, a) \in \mathbb{R}^3,\ a \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 10. Sia data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ k^2-9 & 0 & k \end{pmatrix}$$

- Si dica per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq 0, 2$ **(pt.3)**
- Posto $k = 3$
  - si trovino una matrice diagonale simile ad A_3 e la relativa matrice diagonalizzante.
    Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**
  - Si dica se esiste una diagonalizzante ortogonale (motivare la risposta) e, se è il caso, la si determini.
    Risposta Una matrice diagonalizzante ortogonale esiste poichè A_3 è reale e simmetrica:
    $$P' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ **(pt.3)**

D

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 2.11.12

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $M_2(\mathbb{R})$ si consideri il sottospazio vettoriale $W = \mathcal{L}\left(\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) | x+z=2, t=0\right\}\right)$. Si determinino:

- una base B di W e la sua dimensione;
  Risposta $B_W = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $dim\ W = 3$ ______ **(pt.3)**
- le componenti di $v = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base trovata;
  Risposta $(3, -2, 2)$ ______ **(pt.2)**
- un complemento diretto di W.
  Risposta $\mathcal{L}\left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\right)$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, si consideri il sottospazio vettoriale $U = \{(a+c, -b-c, -a+2b+c) \in \mathbb{R}^3(\mathbb{R}), a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Si determinino:

- una base B' del complemento ortogonale di U;
  Risposta $B' = ((1, 2, 1))$ ______ **(pt.3)**
- i coefficienti di Fourier e le proiezioni di $v = (0, 5, 1)$ lungo i vettori di B'.
  Risposta $v_{e_1} = 11/6$, $\vec{v}_{e_1} = \frac{11}{6}(1, 2, 1)$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali di k il vettore $v = (k-1, 2, 2, 1)$ appartiene alla chiusura di $S = [(-1, k-2, 0, 0), (0, k-1, 0, 0), (1, 1, 1, k-1)] \subseteq \mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.

Risposta $k = 3/2$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri il sistema $A_k X = B_k$ con

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -k & 3 \\ k & 0 & 1-k \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} k-2 \\ k-2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta $k \neq -1, 0$ una sola soluzione, $k = -1$ ∞^1 soluzioni ______ **(pt.4)**
- Posto $k = -1$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $A_{-1}X = B_{-1}$.
  Risposta $\mathcal{I} = \{(2a, -3-3a, a) \in \mathbb{R}^3,\ a \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Sia data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & k^2-4 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Si dica per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq 0, 4$ ______ **(pt.3)**
- Posto $k = -2$
  - si trovino una matrice diagonale simile ad A_{-2} e la relativa matrice diagonalizzante.
    Risposta $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**
  - Si dica se esiste una diagonalizzante ortogonale (motivare la risposta) e, se è il caso, la si determini.
    Risposta Una matrice diagonalizzante ortogonale esiste poichè A_2 è reale e simmetrica:
    $P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**