1

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II prova intermedia - 22.12.08

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati i punti $P=(0,1,0)$, $Q=(1,1,2)$, $R=(0,0,1)$, ed il piano π di equazione cartesiana $x-y+2z=1$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana del piano α passante per P e parallelo a π;
  Risposta $x-y+2z+1=0$ **(pt.2)**
- una rappresentazione cartesiana della retta r passante per Q e ortogonale a π;
  Risposta $y+x-2=2x-z=0$ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana del piano β passante per P, Q ed R;
  Risposta $2x-y-z+1=0$ **(pt.1)**
- un'equazione cartesiana del piano γ passante per $s=\pi\cap\beta$ e ortogonale a π.
  Risposta $11x-5y-8z+7=0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $r:\begin{cases} x-ky=0 \\ z=1 \end{cases}$ ed $s:\begin{cases} x=k \\ y+z=1 \end{cases}$. Si determini la mutua posizione delle rette al variare di k nei reali.
Risposta $k\neq 0$ sghembe; $k=0$ incidenti **(pt.4)**

- posto $k=1$, si determini una rappresentazione cartesiana della retta t di minima distanza tra r ed s;
  Risposta $2x+y+z-3=x-y+2z-2=0$ **(pt.3)**
- posto $k=0$, si determini un'equazione cartesiana del piano π che contiene r ed s.
  Risposta $x=0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati il piano π di equazione $x+3y=0$ ed il punto $P=(3,-1,0)$. Si determinino:

- equazioni cartesiane della sfere Σ_1 e Σ_2 di raggio $\sqrt{10}$ tangenti a π in P;
  Risposta $x^2+y^2+z^2-8x-4y+10=0, x^2+y^2+z^2-4x+8y+10=0$ **(pt.3)**
- un'equazione cartesiana della circonferenza $\mathcal{C}$ di π di centro P e raggio 2.
  Risposta $\begin{cases} x+3y=0 \\ x^2+y^2+z^2-6x+2y+6=0 \end{cases}$ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{Q}$ descritta dalla retta $r: x=y=0$ nella rotazione di asse $x=y=z$.
  Risposta $xy+xz+yz=0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ sia consideri la conica $\mathcal{C}_k$ di equazione cartesiana $x^2-ky^2+(k-1)x+2y-4=0$.

- Al variare del parametro reale k si determini la conica di $\mathcal{C}_k$ rispetto alla quale il punto $P=(0,1)$ ha come polare la retta $r: x-2y=1$;
  Risposta $x^2-7y^2+6x+2y-4=0$ **(pt.2)**
- Posto $k=3$, si riconosca e si studi la conica $\mathcal{C}_3$ determinandone, se esistono, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi.
  Risposta Si tratta di un'iperbole di centro $C=(-1,1/3)$,
  asintoti: $3x-3\sqrt{3}y+3+\sqrt{3}=0$ e $3x+3\sqrt{3}y+3-\sqrt{3}=0$,
  assi: $x=-1$ e $y=1/3$. **(pt.4)**

2

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II prova intermedia - 22.12.08

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati i punti $P = (1, 0, 0)$, $Q = (0, 0, 1)$, $R = (1, 2, 0)$, ed il piano π di equazione cartesiana $2x + y + z = 1$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana del piano α passante per P e parallelo a π;
  Risposta $2x + y + z = 2$ **(pt.2)**
- una rappresentazione cartesiana della retta r passante per Q e ortogonale a π;
  Risposta $x - 2y = y - z + 1 = 0$ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana del piano β passante per P, Q ed R;
  Risposta $x + z = 1$ **(pt.1)**
- un'equazione cartesiana del piano γ passante per $s = \pi \cap \beta$ e ortogonale a π.
  Risposta $y - z + 1 = 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $r : \begin{cases} kx + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ ed $s : \begin{cases} x = k - 1 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$. Si determini la mutua posizione delle rette al variare di k nei reali.
Risposta $k \neq 0$ e $k \neq 1$: sghembe; $k = 0$ o $k = 1$ incidenti **(pt.4)**

- posto $k = 2$, si determini una rappresentazione cartesiana della retta t di minima distanza tra r ed s;
  Risposta $2x + y - 10z = 5x - 8y - 4z - 5 = 0$ **(pt.3)**
- posto $k = 0$, si determini un'equazione cartesiana del piano π che contiene r ed s.
  Risposta $2y + z = 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati il piano π di equazione $y + z = 0$ ed il punto $P = (0, 1, -1)$. Si determinino:

- equazioni cartesiane della sfere Σ_1 e Σ_2 di raggio $\sqrt{8}$ tangenti a π in P;
  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 + 2y + 6z + 2 = 0, x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 2z + 2 = 0$ **(pt.3)**
- un'equazione cartesiana della circonferenza $\mathcal{C}$ di π di centro P e raggio 1.
  Risposta $\begin{cases} y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{Q}$ descritta dalla retta $r : x = y = 0$ nella rotazione di asse $x - 1 = y - 1 = 0$.
  Risposta $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ sia consideri la conica $\mathcal{C}_k$ di equazione cartesiana $kx^2 + y^2 + kx + y - 1 = 0$.

- Al variare del parametro reale k si determini la conica di $\mathcal{C}_k$ rispetto alla quale il punto $P = (1, 0)$ ha come polare la retta $r : 6x + y = 0$;
  Risposta $2x^2 + y^2 + 2x + y - 1 = 0$ **(pt.2)**
- Posto $k = -2$, si riconosca e si studi la conica $\mathcal{C}_{-2}$ determinandone, se esistono, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi.
  Risposta Si tratta di un'iperbole di centro $C = (-1/2, -1/2)$,
  asintoti: $2\sqrt{2}x + 2y + \sqrt{2} + 1 = 0$ e $2\sqrt{2}x - 2y + \sqrt{2} - 1 = 0$,
  assi: $x = -1/2$ e $y = -1/2$. **(pt.4)**

3

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II prova intermedia - 22.12.08

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati i punti $P = (0,0,0)$, $Q = (1,0,0)$, $R = (0,0,1)$, ed il piano π di equazione cartesiana $x + 2z = 1$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana del piano α passante per P e parallelo a π;
  Risposta $x + 2z = 0$ **(pt.2)**
- una rappresentazione cartesiana della retta r passante per Q e ortogonale a π;
  Risposta $y = 2x - z - 2 = 0$ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana del piano β passante per P, Q ed R;
  Risposta $y = 0$ **(pt.1)**
- un'equazione cartesiana del piano γ passante per $s = \pi \cap \beta$ e ortogonale a π.
  Risposta $y = 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $r : \begin{cases} x = 0 \\ z = 1 + k \end{cases}$ ed $s : \begin{cases} y = k \\ x + z = 1 \end{cases}$. Si determini la mutua posizione delle rette al variare di k nei reali.
Risposta $k \neq 0$ sghembe; $k = 0$ incidenti **(pt.4)**

- posto $k = 1$, si determini una rappresentazione cartesiana della retta t di minima distanza tra r ed s;
  Risposta $y - 1 = z - x - 2 = 0$ **(pt.3)**
- posto $k = 0$, si determini un'equazione cartesiana del piano π che contiene r ed s.
  Risposta $x + z = 1$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati il piano π di equazione $2x + y = 0$ ed il punto $P = (0,0,2)$. Si determinino:

- equazioni cartesiane della sfere Σ_1 e Σ_2 di raggio $\sqrt{5}$ tangenti a π in P;
  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 4z + 4 = 0, x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 4z + 4 = 0$ **(pt.3)**
- un'equazione cartesiana della circonferenza $\mathcal{C}$ di π di centro P e raggio 2.
  Risposta $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0 \end{cases}$ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{Q}$ descritta dalla retta $r : y = z = 0$ nella rotazione di asse $y - 1 = z - 2 = 0$.
  Risposta $y^2 + z^2 - 2y - 4z = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ sia consideri la conica $\mathcal{C}_k$ di equazione cartesiana $x^2 + (k+1)y^2 + x + ky + 3 = 0$.

- Al variare del parametro reale k si determini la conica di $\mathcal{C}_k$ rispetto alla quale il punto $P = (0,1)$ ha come polare la retta $r : x + 14y + 10 = 0$;
  Risposta $x^2 + 5y^2 + x + 4y + 3 = 0$ **(pt.2)**
- Posto $k = -5$, si riconosca e si studi la conica $\mathcal{C}_{-5}$ determinandone, se esistono, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi.
  Risposta Si tratta di un'iperbole di centro $C = (-1/2, -5/8)$,
  asintoti: $4x - 8y - 3 = 0$ e $4x + 8y + 7 = 0$,
  assi: $x = -1/2$ e $y = -5/8$. **(pt.4)**

4

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II prova intermedia - 22.12.08

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati i punti $P = (1,1,0)$, $Q = (1,1,1)$, $R = (0,0,1)$, ed il piano π di equazione cartesiana $x + y - z = 1$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana del piano α passante per P e parallelo a π;
  Risposta $x + y - z = 2$ ______ **(pt.2)**
- una rappresentazione cartesiana della retta r passante per Q e ortogonale a π;
  Risposta $x - y = x + z - 2 = 0$ ______ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana del piano β passante per P, Q ed R;
  Risposta $x - y = 0$ ______ **(pt.1)**
- un'equazione cartesiana del piano γ passante per $s = \pi \cap \beta$ e ortogonale a π.
  Risposta $x - y = 0$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $r : \begin{cases} x + y = 0 \\ z = k \end{cases}$ ed $s : \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$. Si determini la mutua posizione delle rette al variare di k nei reali.
Risposta $k \neq 1$ sghembe; $k = 1$ incidenti ______ **(pt.4)**

- posto $k = 0$, si determini una rappresentazione cartesiana della retta t di minima distanza tra r ed s;
  Risposta $x + y - 2z = 2x - y - z + 1 = 0$ ______ **(pt.3)**
- posto $k = 1$, si determini un'equazione cartesiana del piano π che contiene r ed s.
  Risposta $x + y + z = 1$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati il piano π di equazione $y + z + 1 = 0$ ed il punto $P = (2, -1, 0)$. Si determinino:

- equazioni cartesiane della sfere Σ_1 e Σ_2 di raggio $\sqrt{8}$ tangenti a π in P;
  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 4z + 1 = 0, x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 4z + 9 = 0$ ______ **(pt.3)**
- un'equazione cartesiana della circonferenza $\mathcal{C}$ di π di centro P e raggio 1.
  Risposta $\begin{cases} y + z + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 4 = 0 \end{cases}$ ______ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{Q}$ descritta dalla retta $r : x = z = 0$ nella rotazione di asse $x = y = z$.
  Risposta $xy + xz + yz = 0$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ sia consideri la conica $\mathcal{C}_k$ di equazione cartesiana $x^2 - ky^2 + kx + 2ky = 0$.

- Al variare del parametro reale k si determini la conica di $\mathcal{C}_k$ rispetto alla quale il punto $P = (1,0)$ ha come polare la retta $r : 2x + 2y + 1 = 0$;
  Risposta $x^2 - 2y^2 + 2x + 4y = 0$ ______ **(pt.2)**
- Posto $k = 2$, si riconosca e si studi la conica $\mathcal{C}_2$ determinandone, se esistono, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi.
  Risposta Si tratta di un'iperbole di centro $C = (-1, 1)$,
  asintoti: $x + \sqrt{2}y + 1 - \sqrt{2} = 0$ e $x - \sqrt{2}y + 1 + \sqrt{2}=0$,
  assi: $x = -1$ e $y = 1$. ______ **(pt.4)**

5

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II prova intermedia - 22.12.08

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati i punti $P = (1, 0, 0)$, $Q = (0, 0, 2)$, $R = (1, 0, 1)$, ed il piano π di equazione cartesiana $y + 2z = 3$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana del piano α passante per P e parallelo a π;
  Risposta $y + 2z = 0$ **(pt.2)**
- una rappresentazione cartesiana della retta r passante per Q e ortogonale a π;
  Risposta $x = z - 2y - 2 = 0$ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana del piano β passante per P, Q ed R;
  Risposta $y = 0$ **(pt.1)**
- un'equazione cartesiana del piano γ passante per $s = \pi \cap \beta$ e ortogonale a π.
  Risposta $4y - 2z + 3 = 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $r : \begin{cases} kx - y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ ed $s : \begin{cases} x = 1 \\ y = k \end{cases}$. Si determini la mutua posizione delle rette al variare di k nei reali.
Risposta $k \neq 0$ sghembe, $k = 0$ incidenti **(pt.4)**

- posto $k = 1$, si determini una rappresentazione cartesiana della retta t di minima distanza tra r ed s;
  Risposta $x + y = z - 2 = 0$ **(pt.3)**
- posto $k = 0$, si determini un'equazione cartesiana del piano π che contiene r ed s.
  Risposta $y = 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati il piano π di equazione $x - y = 0$ ed il punto $P = (1, 1, 1)$. Si determinino:

- equazioni cartesiane della sfere Σ_1 e Σ_2 di raggio $\sqrt{32}$ tangenti a π in P;
  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 6y - 2z + 3 = 0, x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 10y - 2z + 3 = 0$ **(pt.3)**
- un'equazione cartesiana della circonferenza $\mathcal{C}$ di π di centro P e raggio 2.
  Risposta $\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{Q}$ descritta dalla retta $r : x = z = 0$ nella rotazione di asse $x + 1 = z - 1 = 0$.
  Risposta $x^2 + z^2 + 2x - 2z = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ sia consideri la conica $\mathcal{C}_k$ di equazione cartesiana $kx^2 + y^2 + 2x - ky + 2 = 0$.

- Al variare del parametro reale k si determini la conica di $\mathcal{C}_k$ rispetto alla quale il punto $P = (0, 1)$ ha come polare la retta $r : x + y + 2 = 0$;
  Risposta $y^2 + 2x + 2 = 0$ **(pt.2)**
- Posto $k = -1$, si riconosca e si studi la conica $\mathcal{C}_{-1}$ determinandone, se esistono, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi.
  Risposta Si tratta di un'iperbole di centro $C = (1, -1/2))$,
  asintoti: $2x + 2y - 1 = 0$ e $2x - 2y - 3 = 0$,
  assi: $x = 1$ e $y = -1/2$. **(pt.4)**

6

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II prova intermedia - 22.12.08

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati i punti $P = (2,0,0)$, $Q = (1,1,1)$, $R = (0,0,1)$, ed il piano π di equazione cartesiana $3x + y = 0$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana del piano α passante per P e parallelo a π;
  Risposta $3x + y = 6$ **(pt.2)**
- una rappresentazione cartesiana della retta r passante per Q e ortogonale a π;
  Risposta $x - 3y + 2 = z - 1 = 0$ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana del piano β passante per P, Q ed R;
  Risposta $x - y + 2z = 2$ **(pt.1)**
- un'equazione cartesiana del piano γ passante per $s = \pi \cap \beta$ e ortogonale a π.
  Risposta $x - 3y + 5z = 5$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $r : \begin{cases} 2x + y = 0 \\ y = k + 1 \end{cases}$ ed $s : \begin{cases} x = 0 \\ ky + z = 0 \end{cases}$. Si determini la mutua posizione delle rette al variare di k nei reali.
Risposta $k \neq -1$ sghembe, $k = -1$ incidenti **(pt.4)**

- posto $k = 1$, si determini una rappresentazione cartesiana della retta t di minima distanza tra r ed s;
  Risposta $y - 2 = z + 2 = 0$ **(pt.3)**
- posto $k = -1$, si determini un'equazione cartesiana del piano π che contiene r ed s.
  Risposta $x = 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati il piano π di equazione $2y - z = 0$ ed il punto $P = (0,1,2)$. Si determinino:

- equazioni cartesiane della sfere Σ_1 e Σ_2 di raggio $\sqrt{5}$ tangenti a π in P;
  Risposta $x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 6z + 5 = 0, x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 2z + 5 = 0$ **(pt.3)**
- un'equazione cartesiana della circonferenza $\mathcal{C}$ di π di centro P e raggio 1.
  Risposta $2y - z = 0, x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z + 4 = 0$ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{Q}$ descritta dalla retta $r : y = z = 0$ nella rotazione di asse $x = y = z$.
  Risposta $xy + xz + yz = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ sia consideri la conica $\mathcal{C}_k$ di equazione cartesiana $(k-1)x^2 - y^2 + (k-1)x - y - 1 = 0$.

- Al variare del parametro reale k si determini la conica di $\mathcal{C}_k$ rispetto alla quale il punto $P = (0,0)$ ha come polare la retta $r : 4x - y - 2 = 0$;
  Risposta $4x^2 - y^2 + 4x - y - 1 = 0$ **(pt.2)**
- Posto $k = 2$, si riconosca e si studi la conica $\mathcal{C}_2$ determinandone, se esistono, asintoti, centro (proprio o improprio) e assi.
  Risposta Si tratta di un'iperbole di centro $C = (-1/2, -1/2))$,
  asintoti: $x + y + 1 = 0$ e $x - y = 0$,
  assi: $x = -1/2$ e $y = -1/2$. **(pt.4)**