

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II prova intermedia - 11.12.06

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

1. In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r : \begin{cases} kx - 4z = 2k \\ y = -1 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x - kz = 0 \\ y - (k-2)z = 0 \end{cases}$

(a) Si dica per quali valori del parametro reale k le rette r ed s risultano sghembe, incidenti o parallele.

risposta: $k \neq -2/3, 2$ sghembe; $k = 2$ parallele; $k = -2/3$ incidenti _____ (pt.4)

(b) Nel caso siano parallele si determinino la classe dei parametri direttori della loro comune direzione e un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

risposta: $k = 2$: $[(2, 0, 1)]$; $\alpha : x + 2y - 2z = 0$ _____ (pt.4)

(c) Nel caso siano incidenti si determinino le coordinate del loro punto comune e un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

risposta: $k = -2/3$: $P = (-1/4, -1, 3/8)$; $\beta : x + 2y + 6z = 0$ _____ (pt.4)

2. In $E_3(\mathbb{R})$, si determinino:

(a) una rappresentazione cartesiana della sfera S di centro $C = (1, 2, 1)$ e raggio $R = 5$;

risposta: $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 25$ _____ (pt.1)

(b) una rappresentazione cartesiana della retta s passante per C e ortogonale al piano coordinato xz ;

risposta: $\begin{cases} x = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ _____ (pt.2)

(c) le coordinate dei punti A e B della retta s che appartengono alla sfera S , essendo A il punto di coordinate positive;

risposta: $A = (1, 7, 1)$, $B = (1, -3, 1)$ _____ (pt.1)

(d) una rappresentazione cartesiana della circonferenza \mathcal{C} ottenuta sezionando S con il piano γ passante per il punto medio del segmento \overline{AC} e ortogonale alla retta s ;

risposta: $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 25 \\ y = 9/2 \end{cases}$ _____ (pt.3)

(e) il centro C' e il raggio r della circonferenza \mathcal{C} .

risposta: $C' = (1, 9/2, 1)$; $r = \frac{5}{2}\sqrt{3}$ _____ (pt.3)

3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, è data la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Si determinino:

(a) gli autovalori della matrice A con le relative molteplicità algebriche;

risposta: $t_1 = -2$ con $m.a. = 1$; $t_2 = 1$ con $m.a. = 2$ _____ (pt.2)

(b) l'autospazio S relativo all'autovalore positivo e la relativa dimensione;

risposta: $S = \{(\alpha, 0, 0) \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}\}$; $\dim S = 1$ _____ (pt.3)

(c) una base e la dimensione di S^\perp .

risposta: $B = ((0, 1, 0), (0, 0, 1))$; $\dim S^\perp = 2$ _____ (pt.3)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II prova intermedia - 11.12.06

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

1. In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r : \begin{cases} kx - y = 3k \\ z = 3 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x - ky = -1 \\ (k - 1)y + z = 0 \end{cases}$

(a) Si dica per quali valori del parametro reale k le rette r ed s risultano sghembe, incidenti o parallele.

risposta: $k \neq 1, -3/7$ sghembe; $k = 1$ parallele; $k = -3/7$ incidenti. _____ (pt.4)

(b) Nel caso siano parallele si determinino la classe dei parametri direttori della loro comune direzione e un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

risposta: $k = 1$: $[(1, 1, 0)]$; $3x - 3y - 4z + 3 = 0$. _____ (pt.4)

(c) Nel caso siano incidenti si determinino le coordinate del loro punto comune e un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

risposta: $k = -3/7$: $P = (-19/10, 21/10, 3)$; $3x + 7y - 4z + 3 = 0$. _____ (pt.4)

2. In $E_3(\mathbb{R})$, si determinino:

(a) una rappresentazione cartesiana della sfera S di centro $C = (2, 1, 2)$ e raggio $R = 3$;

risposta: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$ _____ (pt.1)

(b) una rappresentazione cartesiana della retta s passante per C e ortogonale al piano coordinato xy ;

risposta: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ _____ (pt.2)

(c) le coordinate dei punti A e B della retta s che appartengono alla sfera S , essendo A il punto di coordinate positive;

risposta: $A = (2, 1, 5)$ $B = (2, 1, -1)$ _____ (pt.1)

(d) una rappresentazione cartesiana della circonferenza \mathcal{C} ottenuta sezionando S con il piano γ passante per il punto medio del segmento \overline{AC} e ortogonale alla retta s ;

risposta: $\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 9 \\ z = 7/2 \end{cases}$ _____ (pt.3)

(e) il centro C' e il raggio r della circonferenza \mathcal{C} .

risposta: $C' = (2, 1, 7/2)$; $r = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ _____ (pt.3)

3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, è data la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Si determinino:

(a) gli autovalori della matrice A con le relative molteplicità algebriche;

risposta: $t_1 = 3$ con $m.a. = 1$; $t_2 = -2$ con $m.a. = 1$; $t_3 = -1$ con $m.a. = 1$ _____ (pt.2)

(b) l'autospazio S relativo all'autovalore positivo e la relativa dimensione;

risposta: $S = \{(4\alpha, 0, \alpha) \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}\}$; $\dim S = 1$ _____ (pt.3)

(c) una base e la dimensione di S^\perp .

risposta: $B = ((0, 1, 0), (1, 0, -4))$; $\dim S^\perp = 2$ _____ (pt.3)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II prova intermedia - 11.12.06

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

1. In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r : \begin{cases} y + kz = 4 \\ x = 2 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} ky + z = 2 \\ x + (k+1)z = 0 \end{cases}$

(a) Si dica per quali valori del parametro reale k le rette r ed s risultano sghembe, incidenti o parallele.

risposta: $k \neq -1, 2/3$ sghembe; $k = -1$ parallele; $k = 2/3$ incidenti _____ (pt.4)

(b) Nel caso siano parallele si determinino la classe dei parametri direttori della loro comune direzione e un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

risposta: $k = -1$: $[(0, 1, 1)]$; $3x - y + z - 2 = 0$ _____ (pt.4)

(c) Nel caso siano incidenti si determinino le coordinate del loro punto comune e un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

risposta: $k = 2/3$: $P = (2, 24/5, -6/5)$; $3x - 6y - 4z + 18 = 0$ _____ (pt.4)

2. In $E_3(\mathbb{R})$, si determinino:

(a) una rappresentazione cartesiana della sfera S di centro $C = (4, 1, 1)$ e raggio $R = 7$;

risposta: $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 49$ _____ (pt.1)

(b) una rappresentazione cartesiana della retta s passante per C e ortogonale al piano coordinato yz ;

risposta: $\begin{cases} y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$ _____ (pt.2)

(c) le coordinate dei punti A e B della retta s che appartengono alla sfera S , essendo A il punto di coordinate positive;

risposta: $A = (11, 1, 1)$; $B = (-3, 1, 1)$ _____ (pt.1)

(d) una rappresentazione cartesiana della circonferenza \mathcal{C} ottenuta sezionando S con il piano γ passante per il punto medio del segmento \overline{AC} e ortogonale alla retta s ;

risposta: $\begin{cases} (x - 4)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 49 \\ x = 15/2 \end{cases}$ _____ (pt.3)

(e) il centro C' e il raggio r della circonferenza \mathcal{C} .

risposta: $C' = (15/2, 1, 1)$; $r = \frac{7}{2}\sqrt{3}$ _____ (pt.3)

3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, è data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$. Si determinino:

(a) gli autovalori della matrice A con le relative molteplicità algebriche;

risposta: $t_1 = 1$ con $m.a. = 1$; $t_2 = -1$ con $m.a. = 1$; $t_3 = -3$ con $m.a. = 1$ _____ (pt.2)

(b) l'autospazio S relativo all'autovalore positivo e la relativa dimensione;

risposta: $S = \{(\alpha, 0, 0) \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}\}$; $\dim S = 1$ _____ (pt.3)

(c) una base e la dimensione di S^\perp .

risposta: $B = ((0, 1, 0), (0, 0, 1))$; $\dim S^\perp = 2$ _____ (pt.3)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II prova intermedia - 11.12.06

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

1. In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r : \begin{cases} ky - z = 3k \\ x = 3 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} y - kz = -1 \\ x + (k - 1)z = 0 \end{cases}$

(a) Si dica per quali valori del parametro reale k le rette r ed s risultano sghembe, incidenti o parallele.

risposta: $k \neq 1, -3/7$ sghembe; $k = 1$ parallele; $k = -3/7$ incidenti _____ (pt.4)

(b) Nel caso siano parallele si determinino la classe dei parametri direttori della loro comune direzione e un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

risposta: $k = 1$: $[(0, 1, 1)]$; $4x - 3y + 3z - 3 = 0$ _____ (pt.4)

(c) Nel caso siano incidenti si determinino le coordinate del loro punto comune e un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

risposta: $k = -3/7$: $P = (3, -19/10, 21/10)$; $4x - 3y - 7z - 3 = 0$ _____ (pt.4)

2. In $E_3(\mathbb{R})$, si determinino:

(a) una rappresentazione cartesiana della sfera S di centro $C = (2, 1, 1)$ e raggio $R = 3$;

risposta: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 9$ _____ (pt.1)

(b) una rappresentazione cartesiana della retta s passante per C e ortogonale al piano coordinato xy ;

risposta: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ _____ (pt.2)

(c) le coordinate dei punti A e B della retta s che appartengono alla sfera S , essendo A il punto di coordinate positive;

risposta: $A = (2, 1, 4)$ $B = (2, 1, -2)$ _____ (pt.1)

(d) una rappresentazione cartesiana della circonferenza \mathcal{C} ottenuta sezionando S con il piano γ passante per il punto medio del segmento \overline{AC} e ortogonale alla retta s ;

risposta: $\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 9 \\ z = 5/2 \end{cases}$ _____ (pt.3)

(e) il centro C' e il raggio r della circonferenza \mathcal{C} .

risposta: $C' = (2, 1, 5/2)$; $r = \frac{3}{2}\sqrt{3}$ _____ (pt.3)

3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, è data la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Si determinino:

(a) gli autovalori della matrice A con le relative molteplicità algebriche;

risposta: $t_1 = 4$ con $m.a. = 2$; $t_2 = -1$ con $m.a. = 1$ _____ (pt.2)

(b) l'autospazio S relativo all'autovalore positivo e la relativa dimensione;

risposta: $S = \{(0, \alpha, 0) \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}\}$; $\dim S = 1$ _____ (pt.3)

(c) una base e la dimensione di S^\perp .

risposta: $B = ((1, 0, 0), (0, 0, 1))$; $\dim S^\perp = 2$ _____ (pt.3)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II prova intermedia - 11.12.06

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

1. In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r : \begin{cases} 4x - ky = -2k \\ z = -1 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} kx - y = 0 \\ (k-2)x - z = 0 \end{cases}$

(a) Si dica per quali valori del parametro reale k le rette r ed s risultano sghembe, incidenti o parallele.

risposta: $k \neq 2, -2/3$ sghembe; $k = 2$ parallele; $k = -2/3$ incidenti _____ (pt.4)

(b) Nel caso siano parallele si determinino la classe dei parametri direttori della loro comune direzione e un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

risposta: $k = 2$: $[(1, 2, 0)]$; $2x - y - 2z = 0$ _____ (pt.4)

(c) Nel caso siano incidenti si determinino le coordinate del loro punto comune e un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

risposta: $k = -2/3$: $P = (3/8, -1/4, -1)$; $6x + y + 2z = 0$ _____ (pt.4)

2. In $E_3(\mathbb{R})$, si determinino:

(a) una rappresentazione cartesiana della sfera S di centro $C = (3, 1, 2)$ e raggio $R = 5$;

risposta: $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 25$ _____ (pt.1)

(b) una rappresentazione cartesiana della retta s passante per C e ortogonale al piano coordinato xz ;

risposta: $\begin{cases} x = 3 \\ z = 2 \end{cases}$ _____ (pt.2)

(c) le coordinate dei punti A e B della retta s che appartengono alla sfera S , essendo A il punto di coordinate positive;

risposta: $A = (3, 6, 2)$; $B = (3, -4, 2)$ _____ (pt.1)

(d) una rappresentazione cartesiana della circonferenza \mathcal{C} ottenuta sezionando S con il piano γ passante per il punto medio del segmento \overline{AC} e ortogonale alla retta s ;

risposta: $\begin{cases} (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 25 \\ y = 7/2 \end{cases}$ _____ (pt.3)

(e) il centro C' e il raggio r della circonferenza \mathcal{C} .

risposta: $C' = (3, 7/2, 2)$; $r = \frac{5}{2}\sqrt{3}$ _____ (pt.3)

3. In $\mathbf{R}^3(\mathbf{R})$ con il prodotto scalare euclideo, è data la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Si determinino:

(a) gli autovalori della matrice A con le relative molteplicità algebriche;

risposta: $t_1 = -1$ con $m.a. = 1$; $t_2 = -2$ con $m.a. = 1$; $t_3 = 2$ con $m.a. = 1$ _____ (pt.2)

(b) l'autospazio S relativo all'autovalore positivo e la relativa dimensione;

risposta: $S = \{(-2\alpha, -6\alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}\}$; $\dim S = 1$ _____ (pt.3)

(c) una base e la dimensione di S^\perp .

risposta: $B = ((1, 0, 2), (0, 1, 6))$; $\dim S^\perp = 2$ _____ (pt.3)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II prova intermedia - 11.12.06

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

1. In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino le rette $r : \begin{cases} kx + z = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x + kz = 2 \\ (k+1)x + y = 0 \end{cases}$

(a) Si dica per quali valori del parametro reale k le rette r ed s risultano sghembe, incidenti o parallele.

risposta: $k \neq -1, 2/3$ sghembe; $k = -1$ parallele; $k = 2/3$ incidenti _____ (pt.4)

(b) Nel caso siano parallele si determinino la classe dei parametri direttori della loro comune direzione e un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

risposta: $k = -1$: $[(1, 0, 1)]$; $x + 3y - z - 2 = 0$ _____ (pt.4)

(c) Nel caso siano incidenti si determinino le coordinate del loro punto comune e un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

risposta: $k = 2/3$: $P = (-6/5, 2, 24/5)$; $4x - 3y + 6z - 18 = 0$ _____ (pt.4)

2. In $E_3(\mathbb{R})$, si determinino:

(a) una rappresentazione cartesiana della sfera S di centro $C = (1, 1, 4)$ e raggio $R = 7$;

risposta: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 49$ _____ (pt.1)

(b) una rappresentazione cartesiana della retta s passante per C e ortogonale al piano coordinato yz ;

risposta: $\begin{cases} y = 1 \\ z = 4 \end{cases}$ _____ (pt.2)

(c) le coordinate dei punti A e B della retta s che appartengono alla sfera S , essendo A il punto di coordinate positive;

risposta: $A = (8, 1, 4)$; $B = (-6, 1, 4)$ _____ (pt.1)

(d) una rappresentazione cartesiana della circonferenza \mathcal{C} ottenuta sezionando S con il piano γ passante per il punto medio del segmento \overline{AC} e ortogonale alla retta s ;

risposta: $\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 49 \\ x = 9/2 \end{cases}$ _____ (pt.3)

(e) il centro C' e il raggio r della circonferenza \mathcal{C} .

risposta: $C' = (9/2, 1, 4)$; $r = \frac{7}{2}\sqrt{3}$ _____ (pt.3)

3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, è data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Si determinino:

(a) gli autovalori della matrice A con le relative molteplicità algebriche;

risposta: $t_1 = 1$ con $m.a. = 2$; $t_2 = -2$ con $m.a. = 1$ _____ (pt.2)

(b) l'autospazio S relativo all'autovalore positivo e la relativa dimensione;

risposta: $S = \{(0, \alpha, 0) \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}\}$; $\dim S = 1$ _____ (pt.3)

(c) una base e la dimensione di S^\perp .

risposta: $B = ((1, 0, 0), (0, 0, 1))$; $\dim S^\perp = 2$ _____ (pt.3)