UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 3.11.09

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In M^2 (R) si consideri il sottospazio vettoriale $V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) | x - t = 0, y + x = 0 \right\}$. Si determinino:

- una base B di V e la sua dimensione;
  Risposta $B_V = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$, $dim\ V = 2$ **(pt.2)**
- le componenti di $v = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base trovata;
  Risposta $(2, 1)$ **(pt.2)**
- un complemento diretto di V.
  Risposta $\mathcal{L}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, si consideri il sottospazio vettoriale $U = \{(a - c, b + c, b + a, 0) \in \mathbb{R}^4(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R}\}$. Si determinino:

- una base B' del complemento ortogonale di U;
  Risposta $((1, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1))$ **(pt.3)**
- le proiezioni di $v = (1, 2, 1, -2)$ lungo i vettori di B'.
  Risposta $\vec{v}_{e_1} = 2/3(1, 1, -1, 0)$, $\vec{v}_{e_2} = -2(0, 0, 0, 1)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali di k il vettore $v = (k^2, 0, k + 1, 1)$ appartiene alla chiusura di $S = [(1, 0, k, -k), (k, 0, 0, 1), (0, 1, 0, k)] \subseteq \mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.

Risposta per nessun valore di k **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2k & 1 \\ 0 & 1 & -k \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ k+1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice dei coefficienti;
  Risposta $k \neq 0 \land k \neq -1 : \rho(A) = 3, \quad k = 0 \lor k = -1 : \rho(A) = 2$ **(pt.2)**
- il rango della matrice completa;
  Risposta $k \neq -1 : \rho(A|B) = 3, \quad k = -1 : \rho(A|B) = 2$ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta $k \neq 0 \land k \neq -1 : \exists!\ sol, \qquad k = -1 : \infty^1 sol$ **(pt.2)**
- Posto $k = -1$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.
  Risposta $\{(a, -a, a) \in \mathbb{R}^3,\ a \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Sia data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$

- Si trovino, al variare del parametro reale k, gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.
  Risposta $k \neq 2, 3 \quad \lambda = 2, 3$ con $a_{(\lambda)} = g_{(\lambda)} = 1$, $\lambda = k$ con $a_{(\lambda)} = g_{(\lambda)} = 2$,
  $k = 2 : \ a_{(2)} = g_{(2)} = 3, \quad a_{(3)} = g_{(3)} = 1$
  $k = 3 : \ a_{(3)} = 3, \ g_{(3)} = 2, \quad a_{(2)} = g_{(2)} = 1$ **(pt.2)**
- Si dica per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq 3$ **(pt.3)**
- Posto $k = 2$ si trovi una matrice diagonale simile ad A_k e la relativa matrice diagonalizzante.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

2

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 3.11.09

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In M^2 (R) si consideri il sottospazio vettoriale $V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) | x - t = 0, y - x = 0 \right\}$. Si determinino:

- una base B di V e la sua dimensione;

  Risposta $B_V = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$, $dim\ V = 2$ **(pt.2)**
- le componenti di $v = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base trovata;

  Risposta $(2, 5)$ **(pt.2)**
- un complemento diretto di V.

  Risposta $\mathcal{L}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, si consideri il sottospazio vettoriale $U = \{(a + c, a + b, a + c, 0) \in \mathbb{R}^4(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R}\}$. Si determinino:

- una base B' del complemento ortogonale di U;

  Risposta $((1, 0, -1, 0), (0, 0, 0, 1))$ **(pt.3)**
- le proiezioni di $v = (2, 5, 0, 1)$ lungo i vettori di B'.

  Risposta $\vec{v}_{e_1} = (1, 0, -1, 0)$, $\vec{v}_{e_2} = (0, 0, 0, 1)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali di k il vettore $v = (k^2, 0, k, 1)$ appartiene alla chiusura di $S = [(1, 0, k, -k), (k, 0, 0, 1), (0, 1, 0, k)] \subseteq \mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.

Risposta $k = -1 \ \vee \ k = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2k & 1 \\ 0 & -k & k \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ k+2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice dei coefficienti;

  Risposta $k \neq 0 \wedge k \neq -2 : \rho(A) = 3, \quad k = 0 \vee k = -2 : \rho(A) = 2$ **(pt.2)**
- il rango della matrice completa;

  Risposta $k \neq -2 : \rho(A|B) = 3, \quad k = -2 : \rho(A|B) = 2$ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.

  Risposta $k \neq 0 \wedge k \neq -2 : \exists!\ sol, \quad k = -2 : \infty^1 sol$ **(pt.2)**
- Posto $k = -2$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.

  Risposta $\{(-5a, a, a) \in \mathbb{R}^3,\ a \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Sia data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

- Si trovino, al variare del parametro reale k, gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.

  Risposta $k \neq 2, 3 \quad \lambda = 2, 3$ con $a_{(\lambda)} = g_{(\lambda)} = 1$, $\lambda = k$ con $a_{(\lambda)} = g_{(\lambda)} = 2$,
  $k = 2 : a_{(2)} = g_{(2)} = 3, \quad a_{(3)} = g_{(3)} = 1$
  $k = 3 : a_{(3)} = 3 \ g_{(3)} = 2 \quad a_{(2)} = g_{(2)} = 1$ **(pt.2)**
- Si dica per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.

  Risposta $k \neq 3$ **(pt.3)**
- Posto $k = 2$ si trovi una matrice diagonale simile ad A_k e la relativa matrice diagonalizzante.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

3

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 3.11.09

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In M^2 (R) si consideri il sottospazio vettoriale $V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) | 3x - t = 0, y + x = 0 \right\}$. Si determinino:

- una base B di V e la sua dimensione;

  Risposta $B_V = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$, $dim\ V = 2$ **(pt.2)**
- le componenti di $v = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ rispetto alla base trovata;

  Risposta $(1, 8)$ **(pt.2)**
- un complemento diretto di V.

  Risposta $\mathcal{L}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\right)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, si consideri il sottospazio vettoriale $U = \{(a - b, b - c, c - a, 0) \in \mathbb{R}^4(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R}\}$. Si determinino:

- una base B' del complemento ortogonale di U;

  Risposta $((1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ **(pt.3)**
- le proiezioni di $v = (1, 1, 1, 1)$ lungo i vettori di B'.

  Risposta $\vec{v}_{e_1} = (1, 1, 1, 0)$, $\vec{v}_{e_2} = (0, 0, 0, 1)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali di k il vettore $v = (0, 0, k, 1)$ appartiene alla chiusura di $S = [(1, 0, k, -k), (k, 0, 0, 1), (0, 1, 0, k)] \subseteq \mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.

Risposta $k = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4k & 1 \\ 0 & 2 & -k \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ k+1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice dei coefficienti;

  Risposta $k \neq 0 \wedge k \neq -1 : \rho(A) = 3, \quad k = 0 \vee k = -1 : \rho(A) = 2$ **(pt.2)**
- il rango della matrice completa;

  Risposta $k \neq -1 : \rho(A|B) = 3, \quad k = -1 : \rho(A|B) = 2$ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.

  Risposta $k \neq 0 \wedge k \neq -1 : \exists!\ sol, \quad k = -1 : \infty^1 sol$ **(pt.2)**
- Posto $k = -1$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.

  Risposta $\{(2a, -a, 2a) \in \mathbb{R}^3,\ a \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Sia data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

- Si trovino, al variare del parametro reale k, gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.

  Risposta $k \neq 2, 3 \quad \lambda = 2, 3$ con $a_{(\lambda)} = g_{(\lambda)} = 1$, $\lambda = k$ con $a_{(\lambda)} = g_{(\lambda)} = 2$,
  $k = 3 : a_{(3)} = g_{(3)} = 3, \quad a_{(2)} = g_{(2)} = 1$
  $k = 2 : a_{(2)} = 3\ g_{(2)} = 2, \quad a_{(3)} = g_{(3)} = 1$ **(pt.2)**
- Si dica per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.

  Risposta $k \neq 2$ **(pt.3)**
- Posto $k = 3$ si trovi una matrice diagonale simile ad A_k e la relativa matrice diagonalizzante.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

4

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 3.11.09

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In M^2 (R) si consideri il sottospazio vettoriale $V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) | z - t = 0, y + z = 0 \right\}$. Si determinino:

- una base B di V e la sua dimensione;

  Risposta $B_V = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$, $dim\ V = 2$ **(pt.2)**
- le componenti di $v = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base trovata;

  Risposta $(1, 2)$ **(pt.2)**
- un complemento diretto di V.

  Risposta $\mathcal{L} \left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \right)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, si consideri il sottospazio vettoriale $U = \{(b - c, c + a, b + a, 0) \in \mathbb{R}^4(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R}\}$. Si determinino:

- una base B' del complemento ortogonale di U;

  Risposta $((1, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1))$ **(pt.3)**
- le proiezioni di $v = (3, 0, -3, 3)$ lungo i vettori di B'.

  Risposta $\vec{v}_{e_1} = 2(1, 1, -1, 0)$, $\vec{v}_{e_2} = 3(0, 0, 0, 1)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali di k il vettore $v = (k^2, 0, 0, 1)$ appartiene alla chiusura di $S = [(1, 0, k, -k), (k, 0, 0, 1), (0, 1, 0, k)] \subseteq \mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.

Risposta $k = 1 \ \vee \ k = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2k & 2 \\ 1 & 0 & -2k \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k+1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice dei coefficienti;

  Risposta $k \neq -\frac{1}{4} \wedge k \neq -1 : \rho(A) = 3$, $k = -\frac{1}{4} \vee k = -1 : \rho(A) = 2$ **(pt.2)**
- il rango della matrice completa;

  Risposta $k \neq -1 : \rho(A|B) = 3$, $k = -1 : \rho(A|B) = 2$ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.

  Risposta $k \neq -\frac{1}{4} \wedge k \neq -1 : \exists!\ sol$, $k = -1 : \infty^1 sol$ **(pt.2)**
- Posto $k = -1$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.

  Risposta $\{(-2a, 3a, a) \in \mathbb{R}^3,\ a \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Sia data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Si trovino, al variare del parametro reale k, gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.

  Risposta $k \neq 2, 3$ $\lambda = 2, 3$ con $a_{(\lambda)} = g_{(\lambda)} = 1$, $\lambda = k$ con $a_{(\lambda)} = g_{(\lambda)} = 2$,
  $k = 3 : a_{(3)} = g_{(3)} = 3$ $a_{(2)} = g_{(2)} = 1$
  $k = 2 : a_{(2)} = 3,\ g_{(2)} = 2,$ $a_{(3)} = g_{(3)} = 1$ **(pt.2)**
- Si dica per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.

  Risposta $k \neq 2$ **(pt.3)**
- Posto $k = 3$ si trovi una matrice diagonale simile ad A_k e la relativa matrice diagonalizzante.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

5

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 3.11.09

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In M^2 (R) si consideri il sottospazio vettoriale $V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) | x - z = 0, y - x = 0 \right\}$. Si determinino:

- una base B di V e la sua dimensione;
  Risposta $B_V = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$, $dim\ V = 2$ ________ **(pt.2)**
- le componenti di $v = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ rispetto alla base trovata;
  Risposta $(5, 6)$ ________ **(pt.2)**
- un complemento diretto di V.
  Risposta $\mathcal{L}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right)$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, si consideri il sottospazio vettoriale $U = \{(a + b, a + c, b + a, 0) \in \mathbb{R}^4(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R}\}$. Si determinino:

- una base B' del complemento ortogonale di U;
  Risposta $((1, 0, -1, 0), (0, 0, 0, 1))$ ________ **(pt.3)**
- le proiezioni di $v = (6, 0, 0, 6)$ lungo i vettori di B'.
  Risposta $\vec{v}_{e_1} = 3(1, 0, -1, 0)$, $\vec{v}_{e_2} = 6(0, 0, 0, 1)$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali di k il vettore $v = (k^2, 0, k, k)$ appartiene alla chiusura di $S = [(1, 0, k, -k), (k, 0, 0, 1), (0, 1, 0, k)] \subseteq \mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.

Risposta $k = 0$ ________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2k^2 \\ -k & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 3k \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice dei coefficienti;
  Risposta $k \neq 1 \wedge k \neq 0 : \rho(A) = 3$, $k = 1 \vee k = 0 : \rho(A) = 2$ ________ **(pt.2)**
- il rango della matrice completa;
  Risposta $k \neq 0 : \rho(A|B) = 3$, $k = 0 : \rho(A|B) = 2$ ________ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta $k \neq 1 \wedge k \neq 0 : \exists!\ sol$, $k = 0 : \infty^1 sol$ ________ **(pt.2)**
- Posto $k = 0$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.
  Risposta $\{(2a, -a, 0) \in \mathbb{R}^3,\ a \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Sia data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & k & k \end{pmatrix}$$

- Si trovino, al variare del parametro reale k, gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.
  Risposta $k \neq 2, 3$ $\quad \lambda = 2, 3$ con $a_{(\lambda)} = g_{(\lambda)} = 1$, $\lambda = k$ con $a_{(\lambda)} = g_{(\lambda)} = 2$,
  $k = 2 : a_{(2)} = g_{(2)} = 3$, $\quad a_{(3)} = g_{(3)} = 1$
  $k = 3 : a_{(3)} = 3$, $g_{(3)} = 2$, $\quad a_{(2)} = g_{(2)} = 1$ ________ **(pt.2)**
- Si dica per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq 3$ ________ **(pt.3)**
- Posto $k = 2$ si trovi una matrice diagonale simile ad A_k e la relativa matrice diagonalizzante.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ________ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 3.11.09

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In M^2 (R) si consideri il sottospazio vettoriale $V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) | -2z+t=0, z-x=0 \right\}$. Si determinino:

- una base B di V e la sua dimensione;

  Risposta $B_V = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$, $dim\ V = 2$ **(pt.2)**
- le componenti di $v = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$ rispetto alla base trovata;

  Risposta $(5,1)$ **(pt.2)**
- un complemento diretto di V.

  Risposta $\mathcal{L}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \right)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, si consideri il sottospazio vettoriale $U = \{(a, b+c, 0, a) \in \mathbb{R}^4(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R}\}$. Si determinino:

- una base B' del complemento ortogonale di U;

  Risposta $((1,0,0,-1),(0,0,1,0))$ **(pt.3)**
- le proiezioni di $v = (6,0,3,0)$ lungo i vettori di B'.

  Risposta $\vec{v}_{e_1} = 3(1,0,0,-1)$, $\vec{v}_{e_2} = 3(0,0,1,0)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali di k il vettore $v = (k^2, 0, 0, k^2)$ appartiene alla chiusura di $S = [(1,0,k,-k),(k,0,0,1),(0,1,0,k)] \subseteq \mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.

Risposta $k=1 \vee k=0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} -2k & 1 & 1 \\ 1 & -k & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ k+1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice dei coefficienti;

  Risposta $k \neq 0 \wedge k \neq -1 : \rho(A) = 3, \quad k=0 \vee k=-1 : \rho(A) = 2$ **(pt.2)**
- il rango della matrice completa;

  Risposta $k \neq -1 : \rho(A|B) = 3, \quad k=-1 : \rho(A|B) = 2$ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.

  Risposta $k \neq 0 \wedge k \neq -1 : \exists!\ sol, \quad k=-1 : \infty^1 sol$ **(pt.2)**
- Posto $k=-1$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.

  Risposta $\{(a,-a,-a) \in \mathbb{R}^3,\ a \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Sia data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Si trovino, al variare del parametro reale k, gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.

  Risposta $k \neq 2,3 \quad \lambda = 2,3$ con $a_{(\lambda)} = g_{(\lambda)} = 1$, $\lambda = k$ con $a_{(\lambda)} = g_{(\lambda)} = 2$,
  $k=3 : a_{(3)} = g_{(3)} = 3, \quad a_{(2)} = g_{(2)} = 1$
  $k=2 : a_{(2)} = 3,\ g_{(2)} = 2, \quad a_{(3)} = g_{(3)} = 1$ **(pt.2)**
- Si dica per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.

  Risposta $k \neq 2$ **(pt.3)**
- Posto $k=3$ si trovi una matrice diagonale simile ad A_k e la relativa matrice diagonalizzante.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 3.11.09

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In M^2 (R) si consideri il sottospazio vettoriale $V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) | x - y = 0, t + x = 0 \right\}$. Si determinino:

- una base B di V e la sua dimensione;
  Risposta $B_V = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$, $dim\ V = 2$ ________ **(pt.2)**
- le componenti di $v = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base trovata;
  Risposta $(2, 3)$ ________ **(pt.2)**
- un complemento diretto di V.
  Risposta $\mathcal{L}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right)$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, si consideri il sottospazio vettoriale $U = \{(a - b, a - b, c, 0) \in \mathbb{R}^4(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R}\}$. Si determinino:

- una base B' del complemento ortogonale di U;
  Risposta $((1, -1, 0, 0), (0, 0, 0, 1))$ ________ **(pt.3)**
- le proiezioni di $v = (2, 5, 0, 5)$ lungo i vettori di B'.
  Risposta $\vec{v}_{e_1} = -\frac{3}{2}(1, -1, 0, 0)$, $\vec{v}_{e_2} = 5(0, 0, 0, 1)$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali di k il vettore $v = (0, k + 1, 0, k)$ appartiene alla chiusura di $S = [(1, 0, k, -k), (k, 0, 0, 1), (0, 1, 0, k)] \subseteq \mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.

Risposta $k = 0$ ________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2k \\ 0 & k & -k \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k+2 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice dei coefficienti;
  Risposta $k \neq 0 \wedge k \neq -2 : \rho(A) = 3, \quad k = 0 \vee k = -2 : \rho(A) = 2$ ________ **(pt.2)**
- il rango della matrice completa;
  Risposta $k \neq 0 \wedge k \neq -2 : \rho(A|B) = 3, \quad k = 0 \vee k = -2 : \rho(A|B) = 2$ ________ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta $k \neq 0 \wedge k \neq -2 : \exists!\ sol, \quad k = 0 \vee k = -2 : \infty^1 sol$ ________ **(pt.2)**
- Posto $k = -2$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.
  Risposta $\{(5a, -a, -a) \in \mathbb{R}^3,\ a \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Sia data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Si trovino, al variare del parametro reale k, gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.
  Risposta $k \neq 2, 3$ $\quad \lambda = 2, 3$ con $a_{(\lambda)} = g_{(\lambda)} = 1$, $\lambda = k$ con $a_{(\lambda)} = g_{(\lambda)} = 2$,
  $k = 2 : a_{(2)} = g_{(2)} = 3, \quad a_{(3)} = g_{(3)} = 1$
  $k = 3 : a_{(3)} = g_{3)} = 3, \quad a_{(2)} = g_{(2)} = 1$ ________ **(pt.2)**
- Si dica per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta per ogni valore di k ________ **(pt.3)**
- Posto $k = 2$ si trovi una matrice diagonale simile ad A_k e la relativa matrice diagonalizzante.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ________ **(pt.3)**

8

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 3.11.09

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In M^2 (R) si consideri il sottospazio vettoriale $V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) | z+t=0, z+y=0 \right\}$. Si determinino:

- una base B di V e la sua dimensione;
  Risposta $B_V = \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$, $dim\ V = 2$ **(pt.2)**
- le componenti di $v = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base trovata;
  Risposta $(1,2)$ **(pt.2)**
- un complemento diretto di V.
  Risposta $\mathcal{L}\left(\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \right)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, si consideri il sottospazio vettoriale $U = \{(b-c, c-a, a-b, 0) \in \mathbb{R}^4(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R}\}$. Si determinino:

- una base B' del complemento ortogonale di U;
  Risposta $((1,1,1,0),(0,0,0,1))$ **(pt.3)**
- le proiezioni di $v = (2,0,3,3)$ lungo i vettori di B'.
  Risposta $\vec{v}_{e_1} = \frac{5}{3}(1,1,1,0)$, $\vec{v}_{e_2} = 3(0,0,0,1)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali di k il vettore $v = (k^2, 0, 0, 1)$ appartiene alla chiusura di $S = [(1,0,k,-k),(k,0,0,1),(0,1,0,k)] \subseteq \mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.

Risposta $k = 1 \ \vee \ k = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2k \\ -k & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ k+1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice dei coefficienti;
  Risposta $k \neq -\frac{1}{4} \wedge k \neq -1 : \rho(A) = 3, \quad k = -\frac{1}{4} \vee k = -1 : \rho(A) = 2$ **(pt.2)**
- il rango della matrice completa;
  Risposta $k \neq -1 : \rho(A|B) = 3, \quad k = -1 : \rho(A|B) = 2$ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta $k \neq -\frac{1}{4} \wedge k \neq -1 : \exists!\ sol, \qquad k = -1 : \infty^1 sol$ **(pt.2)**
- Posto $k = -1$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.
  Risposta $\{(2a, -2a, 3a) \in \mathbb{R}^3,\ a \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Sia data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Si trovino, al variare del parametro reale k, gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.
  Risposta $k \neq 2,3 \quad \lambda = 2,3$ con $a_{(\lambda)} = g_{(\lambda)} = 1$, $\lambda = k$ con $a_{(\lambda)} = g_{(\lambda)} = 2$,
  $k = 2 : a_{(2)} = 3,\ g_{(2)} = 2, \quad a_{(3)} = g_{(3)} = 1$
  $k = 3 : a_{(3)} = g_{3)} = 3, \quad a_{(2)} = g_{(2)} = 1$ **(pt.2)**
- Si dica per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq 2$ **(pt.3)**
- Posto $k = 3$ si trovi una matrice diagonale simile ad A_k e la relativa matrice diagonalizzante.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

9

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 3.11.09

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In M^2 (R) si consideri il sottospazio vettoriale $V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) | 2x - y = 0, x - z = 0 \right\}$. Si determinino:

- una base B di V e la sua dimensione;
  Risposta $B_V = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right), \quad dim\ V = 2$ **(pt.2)**
- le componenti di $v = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base trovata;
  Risposta $(2, 1)$ **(pt.2)**
- un complemento diretto di V.
  Risposta $\mathcal{L}\left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, si consideri il sottospazio vettoriale $U = \{(a - c, a + b, 0, b + c) \in \mathbb{R}^4(\mathbb{R}) : a, b \in \mathbb{R}\}$. Si determinino:

- una base B' del complemento ortogonale di U;
  Risposta $((-1, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 0))$ **(pt.3)**
- le proiezioni di $v = (1, 1, 1, 1)$ lungo i vettori di B'.
  Risposta $\vec{v}_{e_1} = -\frac{1}{3}(-1, 1, 0, -1), \quad \vec{v}_{e_2} = (0, 0, 1, 0)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali di k il vettore $v = (0, 1, 0, k^2)$ appartiene alla chiusura di $S = [(1, 0, k, -k), (k, 0, 0, 1), (0, 1, 0, k)] \subseteq \mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.

Risposta $k = 0 \ \vee \ k = 1$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & -3 & 1 \\ 0 & 2k & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ k+1 \\ 1+k \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice dei coefficienti;
  Risposta $k \neq 3 \wedge k \neq -1 : \rho(A) = 3, \quad k = 3 \vee k = -1 : \rho(A) = 2$ **(pt.2)**
- il rango della matrice completa;
  Risposta $k \neq -1 : \rho(A|B) = 3, \quad k = -1 : \rho(A|B) = 2$ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta $k \neq 3 \wedge k \neq -1 : \exists!\ sol, \qquad k = -1 : \infty^1 sol$ **(pt.2)**
- Posto $k = -1$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.
  Risposta $\{(a, -a, -2a) \in \mathbb{R}^3,\ a \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Sia data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

- Si trovino, al variare del parametro reale k, gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.
  Risposta $k \neq 2, 3 \qquad \lambda = 2, 3$ con $a_{(\lambda)} = g_{(\lambda)} = 1$, $\lambda = k$ con $a_{(\lambda)} = g_{(\lambda)} = 2$,
  $k = 3 : a_{(3)} = 3,\ g_{(3)} = 2, \quad a_{(2)} = g_{(2)} = 1$
  $k = 2 : a_{(2)} = g_{2)} = 3, \quad a_{(3)} = g_{(3)} = 1$ **(pt.2)**
- Si dica per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq 3$ **(pt.3)**
- Posto $k = 2$ si trovi una matrice diagonale simile ad A_k e la relativa matrice diagonalizzante.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**