UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 31.10.08

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali di k il vettore $(0,3,k^3-4,k^2-5)$ appartiene a $\mathcal{L}(((0,0,2,0),(4,0,0,0),(0,1,0,0),(2,1,0,0)))$.
Risposta $k=\pm\sqrt{5}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino i sottospazi:

$$V_1=\{(\alpha,\alpha+\beta,0,2\alpha)\in\mathbb{R}^4:\alpha,\beta\in\mathbb{R}\},\quad V_2=\mathcal{L}\ ((1,1,0,2)).$$

Si determinino:

- una base ortonormale di V_1.
  Risposta $B=((1/\sqrt{6},1/\sqrt{6},0,2/\sqrt{6}),(-1/\sqrt{30},5/\sqrt{30},0,-2/\sqrt{30}))$ **(pt.4)**
- il complemento ortogonale di V_2.
  Risposta $\{(-a-2c,a,b,c)\in\mathbb{R}^4, a,b,c\in\mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Si dica per quali valori reali di k il sistema $S=[(k,0,0),(0,-1,k),(0,0,k)]\subseteq\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ è legato.

Risposta $k=0$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. Si consideri il sistema $AX=B$ con

$$A=\begin{pmatrix} k & 0\\ 1 & k\\ k-1 & -k\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0\\0\\k\end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice incompleta;
  Risposta $k\neq 0:\rho=2\,,k=0:\rho=1$ **(pt.2)**
- il rango della matrice completa;
  Risposta $k\neq 0:\rho=3\,,k=0:\rho=1$ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta $k=0,\ \infty^1$ **(pt.2)**
- Posto $k=0$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX=B$.
  Risposta $\mathcal{I}=\{(0,t),\ t\in\mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Sia data la matrice

$$A_k=\begin{pmatrix} k-1 & 0 & 0\\ k-1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

- Si trovino, al variare di k reale, gli autovalori di A_k, e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.
  Risposta $0,1,k-1\,,k\neq 1\wedge k\neq 2: m_a(\lambda)=m_g(\lambda)=1\,,$
  $k=1: m_a(0)=m_g(0)=2\,,m_a(1)=m_g(1)=1\,,$
  $k=2: m_a(0)=m_g(0)=1\,,m_a(1)=m_g(1)=2$ **(pt.2)**
- Si dica per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $\forall k$ **(pt.3)**
- Posto $k=3$ si trovi una matrice diagonale simile ad A_3 e la relativa matrice diagonalizzante.
  Risposta $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\1&2&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 31.10.08

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali di k il vettore $(0, 0, k^3 + 2, k^2)$ appartiene a $\mathcal{L}(((0, 0, -1, 0), (1, 0, 0, 0), (0, -2, 0, 0), (-1, 1, 0, 0)))$.

Risposta k=0 **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino i sottospazi:

$$V_1 = \{(\beta, \beta, -2\alpha, -\beta) \in \mathbb{R}^4 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}, \quad V_2 = \mathcal{L}\ ((0, 1, 0, 1)).$$

Si determinino:

- una base ortonormale di V_1.
  Risposta $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 0, -1/\sqrt{3}), (0, 0, -1, 0)$ **(pt.4)**
- il complemento ortogonale di V_2.
  Risposta $\{(a, b, c, -b) \in \mathbb{R}^4, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Si dica per quali valori reali di k il sistema $S = [(k + 1, -1, 0), (0, -1, k - 1), (1, 0, k)] \subseteq \mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ è legato.

Risposta $k = -1 \pm \sqrt{2}$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k \\ 0 & k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice incompleta;
  Risposta $\rho = 2 \ \ \forall k$ **(pt.2)**
- il rango della matrice completa;
  Risposta $k \neq 0 : \rho = 3\,, k = 0 : \rho = 2$ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta $k = 0$, una soluzione **(pt.2)**
- Posto $k = 0$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.
  Risposta $\mathcal{I} = \{(0, 1)\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Sia data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & k+1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Si trovino, al variare di k reale, gli autovalori di A_k, e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.
  Risposta $1, 3, k + 1\,, k \neq 0 \wedge k \neq 2 : m_a(\lambda) = m_g(\lambda) = 1\,,$
  $k = 0 : m_a(1) = m_g(1) = 2\,, m_a(3) = m_g(3) = 1\,,$
  $k = 2 : m_a(1) = m_g(1) = 1\,, m_a(3) = m_g(3) = 2$ **(pt.2)**
- Si dica per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $\forall k$ **(pt.3)**
- Posto $k = 3$ si trovi una matrice diagonale simile ad A_3 e la relativa matrice diagonalizzante.
  Risposta $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

3

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 31.10.08

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali di k il vettore $(0,4,k^3-6,k^2-16)$ appartiene a $\mathcal{L}(((0,0,3,0),(9,0,0,0),(0,2,0,0),(3,1,0,0)))$.
Risposta $k \pm 4$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino i sottospazi:

$$V_1 = \{(0,\beta,-2\alpha,-\alpha) \in \mathbb{R}^4 : \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}, \quad V_2 = \mathcal{L}\ ((-1,1,0,0)).$$

Si determinino:

- una base ortonormale di V_1.
  Risposta $(0,1,0,0),(0,0,-2/\sqrt{5},-1/\sqrt{5})$ **(pt.4)**
- il complemento ortogonale di V_2.
  Risposta $\{(a,a,b,c) \in \mathbb{R}^4, a,b,c \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Si dica per quali valori reali di k il sistema $S = [(k-1,1,0),(0,-1,k+1),(-1,0,k)] \subseteq \mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ è legato.

Risposta Nessuno **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -k \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice incompleta;
  Risposta $\rho = 2$ **(pt.2)**
- il rango della matrice completa;
  Risposta $k \neq 0 : \rho = 3\,, k = 0 : \rho = 2$ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta $k = 0$, una soluzione **(pt.2)**
- Posto $k = 0$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.
  Risposta $\mathcal{I} = \{(0,0)\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Sia data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$$

- Si trovino, al variare di k reale, gli autovalori di A_k, e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.
  Risposta $0,2,k\,, k \neq 0 \wedge k \neq 2 : m_a(\lambda) = m_g(\lambda) = 1\,,$
  $k = 0 : m_a(0) = m_g(0) = 2\,, m_a(2) = m_g(2) = 1\,,$
  $k = 2 : m_a(0) = m_g(0) = 1\,, m_a(2) = 2\,, m_g(2) = 1$ **(pt.2)**
- Si dica per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq 2$ **(pt.3)**
- Posto $k = 3$ si trovi una matrice diagonale simile ad A_3 e la relativa matrice diagonalizzante.
  Risposta $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

4

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 31.10.08

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali di k il vettore $(0,-1,k^3+4,k^2-1)$ appartiene a $\mathcal{L}(((0,0,-2,0),(4,0,0,0),(0,-3,0,0),(-2,1,0,0)))$.
Risposta $k=\pm 1$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino i sottospazi:

$$V_1=\{(\alpha,\beta,\alpha,\alpha+\beta)\in\mathbb{R}^4:\alpha,\beta\in\mathbb{R}\},\quad V_2=\mathcal{L}\ ((0,1,0,-1)).$$

Si determinino:

- una base ortonormale di V_1.
  Risposta $(1/\sqrt{3},0,1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}),(-1/\sqrt{15},3/\sqrt{15},-1/\sqrt{15},2/\sqrt{15})$ **(pt.4)**
- il complemento ortogonale di V_2.
  Risposta $\{(a,b,c,b)\in\mathbb{R}^4,a,b,c\in\mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Si dica per quali valori reali di k il sistema $S=[(k+2,-2,0),(0,-1,k-2),(2,0,k)]\subseteq\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ è legato.

Risposta $k=-3\pm\sqrt{17}$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. Si consideri il sistema $AX=B$ con

$$A=\begin{pmatrix}0 & k^2\\ -1 & k+1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\\1\\k\end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice incompleta;
  Risposta $\rho=2$ **(pt.2)**
- il rango della matrice completa;
  Risposta $k\neq 1:\rho=3\,,k=1:\rho=2$ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta $k=1$, una soluzione **(pt.2)**
- Posto $k=1$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX=B$.
  Risposta $\mathcal{I}=\{(1,1)\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Sia data la matrice

$$A_k=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & k & k+1\end{pmatrix}$$

- Si trovino, al variare di k reale, gli autovalori di A_k, e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.
  Risposta $0,1,k+1\,,k\neq -1\wedge k\neq 0:m_a(\lambda)=m_g(\lambda)=1\,,$
  $k=-1:m_a(0)=2\,,m_g(0)=1\,,m_a(1)=m_g(1)=1\,,$
  $k=0:m_a(0)=m_g(0)=1\,,m_a(1)=2\,,m_g(1)=1$ **(pt.2)**
- Si dica per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k\neq -1\wedge k\neq 0$ **(pt.3)**
- Posto $k=3$ si trovi una matrice diagonale simile ad A_3 e la relativa matrice diagonalizzante.
  Risposta $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4&6&0\\0&3&0\\1&-5&1\end{pmatrix}$ **(pt.3)**

5

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 31.10.08

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali di k il vettore $(0, 5, k^3 - 8, k^2 - 25)$ appartiene a $\mathcal{L}(((0, 0, 4, 0), (16, 0, 0, 0), (0, 3, 0, 0), (4, 1, 0, 0)))$.
Risposta $k = \pm 5$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino i sottospazi:

$$V_1 = \{(2\beta, \beta, 0, \alpha - \beta) \in \mathbb{R}^4 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}, \quad V_2 = \mathcal{L}\ ((2, 1, 0, 1)).$$

Si determinino:

- una base ortonormale di V_1.
  Risposta $(0, 0, 0, -1), (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}, 0, 0)$ **(pt.4)**
- il complemento ortogonale di V_2.
  Risposta $\{(a, b, c, -2a - b) \in \mathbb{R}^4, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Si dica per quali valori reali di k il sistema $S = [(k - 2, 2, 0), (0, -1, k + 2), (-2, 0, k)] \subseteq \mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ è legato.

Risposta Nessuno **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} k+1 & 0 \\ 1 & 0 \\ k-1 & -k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice incompleta;
  Risposta $k \neq 0 : \rho = 2\,, k = 0 : \rho = 1$ **(pt.2)**
- il rango della matrice completa;
  Risposta $k \neq 0 : \rho = 3\,, k = 0 : \rho = 1$ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta $k = 0,\ \infty^1$ **(pt.2)**
- Posto $k = 0$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.
  Risposta $\mathcal{I} = \{(0, t),\ t \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Sia data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & k-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$$

- Si trovino, al variare di k reale, gli autovalori di A_k, e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.
  Risposta $1, 2, k\,, k \neq 1 \wedge k \neq 2 : m_a(\lambda) = m_g(\lambda) = 1\,,$
  $k = 1 : m_a(1) = m_g(1) = 2\,, m_a(2) = m_g(2) = 1\,,$
  $k = 2 : m_a(1) = m_g(1) = 1\,, m_a(2) = 2\,, m_g(2) = 1$ **(pt.2)**
- Si dica per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq 2$ **(pt.3)**
- Posto $k = 3$ si trovi una matrice diagonale simile ad A_3 e la relativa matrice diagonalizzante.
  Risposta $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 31.10.08

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali di k il vettore $(0, -2, k^3 + 6, k^2 - 3)$ appartiene a $\mathcal{L}(((0, 0, -3, 0), (9, 0, 0, 0), (0, -4, 0, 0), (-3, 1, 0, 0)))$.
Risposta $k = \pm\sqrt{3}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino i sottospazi:

$$V_1 = \{(\beta, 0, 2\alpha, \alpha - \beta) \in \mathbb{R}^4 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}, \quad V_2 = \mathcal{L}\ ((3, 1, 0, -2)).$$

Si determinino:

- una base ortonormale di V_1.
  Risposta $(1/\sqrt{2}, 0, 0, -1\sqrt{2}), (1/3\sqrt{2}, 0, 4/3\sqrt{2}, 1/3\sqrt{2})$ **(pt.4)**
- il complemento ortogonale di V_2.
  Risposta $\{(a, 2c - 3a, b, c) \in \mathbb{R}^4, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Si dica per quali valori reali di k il sistema $S = [(k + 1/2, -1/2, 0), (0, -1, k - 1/2), (1/2, 0, k)] \subseteq \mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ è legato.

Risposta $k = \frac{-3\pm\sqrt{17}}{8}$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} k & k+1 \\ 0 & k-1 \\ k & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -k \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice incompleta;
  Risposta $k \neq 0 : \rho = 2\,, k = 0 : \rho = 1$ **(pt.2)**
- il rango della matrice completa;
  Risposta $k \neq 0 \wedge k \neq 1 : \rho = 3\,, k = 0 \vee k = 1 : \rho = 2$ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta $k = 1$, una soluzione **(pt.2)**
- Posto $k = 1$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.
  Risposta $\mathcal{I} = \{(-1, 0)\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Sia data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$$

- Si trovino, al variare di k reale, gli autovalori di A_k, e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.
  Risposta $1, -1, k+1\,, k \neq 0 \wedge k \neq -2 : m_a(\lambda) = m_g(\lambda) = 1\,,$
  $k = 0 : m_a(1) = 2\,, m_g(1) = 1\,, m_a(-1) = m_g(-1) = 1\,,$
  $k = -2 : m_a(1) = m_g(1) = 1\,, m_a(-1) = 2\,, m_g(-1) = 1$ **(pt.2)**
- Si dica per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq 0 \wedge k \neq -2$ **(pt.3)**
- Posto $k = 3$ si trovi una matrice diagonale simile ad A_3 e la relativa matrice diagonalizzante.
  Risposta $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -3 & -15/2 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 31.10.08

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali di k il vettore $(0, 7, k^3 - 5, k^2 - 6)$ appartiene a $\mathcal{L}(((0, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 0), (0, 5, 0, 0), (3, 1, 0, 0)))$.
Risposta $k = \pm\sqrt{6}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino i sottospazi:

$$V_1 = \{(\alpha, \beta, \alpha, 2\beta) \in \mathbb{R}^4 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}, \quad V_2 = \mathcal{L}\ ((0, 0, 2, -2)).$$

Si determinino:

- una base ortonormale di V_1.
  Risposta $(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0), (0, 1/\sqrt{5}, 0, 2/\sqrt{5})$ **(pt.4)**
- il complemento ortogonale di V_2.
  Risposta $\{(a, b, c, c) \in \mathbb{R}^4, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Si dica per quali valori reali di k il sistema $S = [(k - 1/2, 1/2, 0), (0, -1, k + 1/2), (-1/2, 0, k)] \subseteq \mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ è legato.

Risposta Nessuno **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \\ k^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice incompleta;
  Risposta $\rho = 2$ **(pt.2)**
- il rango della matrice completa;
  Risposta $k \neq 1 : \rho = 3\,, k = 1 : \rho = 2$ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta $k = 1$, una soluzione **(pt.2)**
- Posto $k = 1$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.
  Risposta $\mathcal{I} = \{(4, -4)\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Sia data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k+1 & k-1 \end{pmatrix}$$

- Si trovino, al variare di k reale, gli autovalori di A_k, e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.
  Risposta $1, 3, k - 1\,, k \neq 2 \wedge k \neq 4 : m_a(\lambda) = m_g(\lambda) = 1\,,$
  $k = 2 : m_a(1) = 2\,, m_g(1) = 1\,, m_a(3) = m_g(3) = 1\,,$
  $k = 4 : m_a(1) = m_g(1) = 1\,, m_a(3) = 2\,, m_g(3) = 1$ **(pt.2)**
- Si dica per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq 2 \wedge k \neq 4$ **(pt.3)**
- Posto $k = 3$ si trovi una matrice diagonale simile ad A_3 e la relativa matrice diagonalizzante.
  Risposta $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 31.10.08

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali di k il vettore $(0,0,k^3,k^2-2)$ appartiene a $\mathcal{L}(((0,0,2,0),(-8,0,0,0),(0,1,0,0),(1,1,0,0)))$.
Risposta $k=\pm\sqrt{2}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino i sottospazi:

$$V_1=\{(\beta,0,-2\alpha,\alpha-\beta)\in\mathbb{R}^4:\alpha,\beta\in\mathbb{R}\},\quad V_2=\mathcal{L}\ ((0,1,0,0)).$$

Si determinino:

- una base ortonormale di V_1.
  Risposta $(1/\sqrt{2},0,0,-1/\sqrt{2}),(1/3\sqrt{2},0,-4/3\sqrt{2},1/3\sqrt{2})$ **(pt.4)**
- il complemento ortogonale di V_2.
  Risposta $\{(a,0,b,c)\in\mathbb{R}^4, a,b,c\in\mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Si dica per quali valori reali di k il sistema $S=[(k+3,-3,0),(0,-1,k-3),(3,0,k)]\subseteq\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ è legato.

Risposta $k=-6\pm3\sqrt{7}$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. Si consideri il sistema $AX=B$ con

$$A=\begin{pmatrix} k+1 & 1\\ 1 & 0\\ -1 & k\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} k\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice incompleta;
  Risposta $\rho=2$ **(pt.2)**
- il rango della matrice completa;
  Risposta $k\neq0:\rho=3\,,k=0:\rho=2$ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta $k=0$, una soluzione **(pt.2)**
- Posto $k=0$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX=B$.
  Risposta $\mathcal{I}=\{(0,0)\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Sia data la matrice

$$A_k=\begin{pmatrix} k & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ k-1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

- Si trovino, al variare di k reale, gli autovalori di A_k, e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.
  Risposta $1,k,2$; $k\neq1\wedge k\neq2: m_a(\lambda)=m_g(\lambda)=1\,,$
  $k=1: m_a(1)=m_g(1)=2\,,m_a(2)=m_g(2)=1\,,$
  $k=2: m_a(1)=m_g(1)=1\,,m_a(2)=2\,,m_g(2)=1$ **(pt.2)**
- Si dica per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k\neq2$ **(pt.3)**
- Posto $k=3$ si trovi una matrice diagonale simile ad A_3 e la relativa matrice diagonalizzante.
  Risposta $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 31.10.08

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori reali di k il vettore $(0, 35, k^3 + 7, k^2 - 7)$ appartiene a $\mathcal{L}(((0, 0, 2, 0), (1, 0, 0, 0), (0, -7, 0, 0), (-21, 1, 0, 0)))$.
Risposta $k = \pm\sqrt{7}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino i sottospazi:

$$V_1 = \{(\beta, -\alpha, \alpha, 0) \in \mathbb{R}^4 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}, \quad V_2 = \mathcal{L}\ ((2, 1, 0, 1)).$$

Si determinino:

- una base ortonormale di V_1.
  Risposta $(1, 0, 0, 0), (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ **(pt.4)**
- il complemento ortogonale di V_2.
  Risposta $\{(a, b, c, -2a - b) \in \mathbb{R}^4, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Si dica per quali valori reali di k il sistema $S = [(k - 3, 3, 0), (0, -1, k + 3), (-3, 0, k)] \subseteq \mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ è legato.

Risposta Nessuno **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & 2 \\ 0 & 0 \\ k-1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ k-1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice incompleta;
  Risposta $k \neq 1 : \rho = 2\,, k = 1 : \rho = 1$ **(pt.2)**
- il rango della matrice completa;
  Risposta $k \neq 1 : \rho = 3\,, k = 1 : \rho = 1$ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta $k = 1,\ \infty^1$ **(pt.2)**
- Posto $k = 1$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.
  Risposta $\mathcal{I} = \{(t, 0), t \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. Sia data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & k-1 & 0 \\ 0 & k+1 & 0 \\ 2 & k & 2 \end{pmatrix}$$

- Si trovino, al variare di k reale, gli autovalori di A_k, e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche.
  Risposta $1, k+1, 2$; $k \neq 0 \wedge k \neq 1 : m_a(\lambda) = m_g(\lambda) = 1\,,$
  $k = 0 : m_a(1) = 2\,, m_g(1) = 1\,, m_a(2) = 1\,, m_g(2) = 1\,,$
  $k = 1 : m_a(1) = m_g(1) = 1\,, m_a(2) = 2\,, m_g(2) = 1.$ **(pt.2)**
- Si dica per quali valori di k la matrice A_k è diagonalizzabile.
  Risposta $k \neq 0 \wedge k \neq 1.$ **(pt.3)**
- Posto $k = 3$ si trovi una matrice diagonale simile ad A_3 e la relativa matrice diagonalizzante.
  Risposta $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ -2 & 13 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**