1

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 3.11.06

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $M_2(\mathbb{R})$ sono dati $v_1 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Si determinino:

- Il sottospazio $U(\mathbb{R})$ generato dal sistema $S = [v_1, v_2, v_3]$;
  Risposta $U(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} -2\alpha + \beta & 4\alpha + \beta \\ 0 & 2\alpha - \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$ ______ **(pt.3)**
- una base B di $U(\mathbb{R})$ e la sua dimensione;
  Risposta $B = (v_1, v_2)$; $\dim U(\mathbb{R}) = 2$ ______ **(pt.2)**
- le componenti in B di $w = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$;
  Risposta $(-1/2, 3)$ ______ **(pt.2)**
- una base B' di un complemento diretto di $U(\mathbb{R})$.
  Risposta $B' = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori del parametro reale k il vettore $v = (k, k+1, 0, 1)$ appartiene alla chiusura di $H = [(1,2,1,1), (0,0,0,1), (1,0,0,1)]$.
Risposta $k = -1$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, è dato il sistema A=$[(2,1,0) = v,\ (1,1,1) = u\ (0,0,1) = w]$. Si dica, se esistono, quali sono le coppie di vettori di A fra loro ortogonali.

Risposta v e w sono fra loro ortogonali ______ **(pt.2)**

Si determinino il coefficiente di Fourier e la proiezione di v lungo u.

Risposta $v_u = 1$ $\vec{v}_u = u = (1,1,1)$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} a & a+1 \\ 2 & a+1 \\ 2-a & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2a+1 \\ a+3 \\ 2-a \end{pmatrix}$, al variare del parametro reale a si determinino:

- il rango della matrice A;
  Risposta $a \neq -1 \ \wedge \ a \neq 2 \ \ r(A) = 2$; $a = -1 \ \vee \ a = 2 \ \ r(A) = 1$ ______ **(pt.2)**
- il rango della matrice $A|B$;
  Risposta $a \neq -1 \ \wedge \ a \neq 2 \ \ r(A|B) = 2$; $a = -1 \ \vee \ a = 2 \ \ r(A|B) = 1$ ______ **(pt.3)**
- i valori di a per i quali il sistema AX=B è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni;
  Risposta $a \neq -1 \ \wedge \ a \neq 2$ 1! soluzione; $a = -1 \vee a = 2$ ∞^1 soluzioni ______ **(pt.3)**
- l'insieme S delle soluzioni per $a = -1$
  Risposta $S = \{(1, \alpha) |\ \alpha \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**
- l'insieme H delle soluzioni per $a = 0$.
  Risposta $H = \{(1,1)\}$ ______ **(pt.1)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 3.11.06

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $M_2(\mathbb{R})$ sono dati $v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Si determinino:

- Il sottospazio $U(\mathbb{R})$ generato dal sistema $S = [v_1, v_2, v_3]$;
  Risposta $U(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha-\beta & 2\alpha-\beta-3\gamma \\ 0 & \alpha+\beta-\gamma \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$ ________________ **(pt.3)**
- una base B di $U(\mathbb{R})$ e la sua dimensione;
  Risposta $B = (v_1, v_2, v_3)$; $\dim U(\mathbb{R}) = 3$ ________________ **(pt.2)**
- le componenti in B di $w = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$;
  Risposta $(-2, 1, 1)$ ________________ **(pt.2)**
- una base B' di un complemento diretto di $U(\mathbb{R})$.
  Risposta $B' = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ ________________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori del parametro reale k il vettore $v = (2-k, 3, 0, k)$ appartiene alla chiusura di $H = [(0,1,0,0), (1,1,0,1), (1,1,1,2)]$.
Risposta $k = 1$ ________________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, è dato il sistema A=$[(2,0,0) = v$, $(1,1,-1) = u$ $(0,1,1) = w]$. Si dica, se esistono, quali sono le coppie di vettori di A fra loro ortogonali.

Risposta v,w e u,w sono fra loro ortogonali ________________ **(pt.2)**

Si determinino il coefficiente di Fourier e la proiezione di v lungo u.

Risposta $v_u = 2/3$ $\vec{v}_u = 2/3u = (2/3, 2/3, -2/3)$ ________________ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & a+2 \\ a-1 & 0 \\ a & a+2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a+1 \\ 1-a \\ 2 \end{pmatrix}$, al variare del parametro reale a si determinino:

- il rango della matrice A;
  Risposta $a \neq 1 \wedge a \neq -2$ $r(A) = 2$; $a = 1 \vee a = -2$ $r(A) = 1$ ________________ **(pt.2)**
- il rango della matrice $A|B$;
  Risposta $a \neq 1 \wedge a \neq -2$ $r(A|B) = 2$; $a = 1 \vee a = -2$ $r(A|B) = 1$ ________________ **(pt.3)**
- i valori di a per i quali il sistema AX=B è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni;
  Risposta $a \neq 1 \wedge a \neq -2$ 1! soluzione; $a = 1 \vee a = -2$ ∞^1 soluzioni ________________ **(pt.3)**
- l'insieme S delle soluzioni per $a = -2$
  Risposta $S = \{(-1, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ ________________ **(pt.2)**
- l'insieme H delle soluzioni per $a = -1$.
  Risposta $H = \{(-1, 1)\}$ ________________ **(pt.1)**

3

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 3.11.06

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $M_2(\mathbb{R})$ sono dati $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
Si determinino:

- Il sottospazio $U(\mathbb{R})$ generato dal sistema $S = [v_1, v_2, v_3]$;

  Risposta $U(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 0 \\ \alpha+3\beta & -\alpha+\beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$ ____________ **(pt.3)**

- una base B di $U(\mathbb{R})$ e la sua dimensione;

  Risposta $B = (v_1, v_2)$; $\dim U(\mathbb{R}) = 2$ ____________ **(pt.2)**

- le componenti in B di $w = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$;

  Risposta $(2, 1)$ ____________ **(pt.2)**

- una base B' di un complemento diretto di $U(\mathbb{R})$.

  Risposta $B' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ ____________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori del parametro reale k il vettore $v = (k, 6-k, 1, 0)$ appartiene alla chiusura di $H = [(2,2,1,1), (0,0,1,0), (1,2,0,0)]$.
Risposta $k = 2$ ____________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, è dato il sistema A=$[(0,1,2) = v$, $(1,-1,1) = u$ $(1,0,0) = w]$. Si dica, se esistono, quali sono le coppie di vettori di A fra loro ortogonali.

Risposta v, w sono ortogonali fra loro ____________ **(pt.2)**

Si determinino il coefficiente di Fourier e la proiezione di v lungo u.
Risposta $v_u = 1/3$; $\vec{v}_u = 1/3u = (1/3, -1/3, 1/3)$ ____________ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 0 & a-4 \\ a+3 & 4 \\ a+3 & a \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a-4 \\ 1-a \\ -3 \end{pmatrix}$, al variare del parametro reale a si determinino:

- il rango della matrice A;

  Risposta $a \neq 4 \wedge a \neq -3$ $r(A) = 2$; $a = 4 \vee a = -3$ $r(A) = 1$ ____________ **(pt.2)**

- il rango della matrice $A|B$;

  Risposta $a \neq 4 \wedge a \neq -3$ $r(A|B) = 2$; $a = 4 \vee a = -3$ $r(A|B) = 1$ ____________ **(pt.3)**

- i valori di a per i quali il sistema AX=B è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni;

  Risposta $a \neq 4 \wedge a \neq -3$ 1! soluzione; $a = 4 \vee a = -3$ ∞^1 soluzioni ____________ **(pt.3)**

- l'insieme S delle soluzioni per $a = -3$

  Risposta $S = \{(\alpha, 1) | \alpha \in \mathbb{R}\}$ ____________ **(pt.2)**

- l'insieme H delle soluzioni per $a = 1$.

  Risposta $H = \{(-1, 1)\}$ ____________ **(pt.1)**

4

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 3.11.06

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $M_2(\mathbb{R})$ sono dati $v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
Si determinino:

- Il sottospazio $U(\mathbb{R})$ generato dal sistema $S = [v_1, v_2, v_3]$;
  Risposta $U(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha + \beta - \gamma \\ -\alpha - \beta & 2\alpha - \beta - 3\gamma \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$ __________ **(pt.3)**
- una base B di $U(\mathbb{R})$ e la sua dimensione;
  Risposta $B = (v_1, v_2, v_3)$; $\dim U(\mathbb{R}) = 3$ __________ **(pt.2)**
- le componenti in B di $w = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$;
  Risposta $(-2, 1, 1)$ __________ **(pt.2)**
- una base B' di un complemento diretto di $U(\mathbb{R})$.
  Risposta $B' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ __________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori del parametro reale k il vettore $v = (k, k+2, 0, 1)$ appartiene alla chiusura di $H = [(1,1,1,1), (0,0,0,1), (2,1,0,1)]$.
Risposta $k = -4$ __________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, è dato il sistema A=$[(0,-1,2) = v$, $(1,1,-1) = u$ $(3,0,3) = w]$. Si dica, se esistono, quali sono le coppie di vettori di A fra loro ortogonali.
Risposta u e w sono ortogonali fra loro __________ **(pt.2)**

Si determinino il coefficiente di Fourier e la proiezione di v lungo u.

Risposta $v_u = -1$ $\vec{v}_u = -u = (-1, -1, 1)$ __________ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} -1 & a-2 \\ a & a-2 \\ a+1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a-3 \\ 2a-2 \\ a+1 \end{pmatrix}$, al variare del parametro reale a si determinino:

- il rango della matrice A;
  Risposta $a \neq 2 \wedge a \neq -1$ $r(A) = 2$; $a = 2 \vee a = -1$ $r(A) = 1$ __________ **(pt.2)**
- il rango della matrice $A|B$;
  Risposta $a \neq 2 \wedge a \neq -1$ $r(A|B) = 2$; $a = 2 \vee a = -1$ $r(A|B) = 1$ __________ **(pt.3)**
- i valori di a per i quali il sistema AX=B è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni;
  Risposta $a \neq 2 \wedge a \neq -1$ 1! soluzione; $a = 2 \vee a = -1$ ∞^1 soluzioni __________ **(pt.3)**
- l'insieme S delle soluzioni per $a = 2$
  Risposta $S = \{(1, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ __________ **(pt.2)**
- l'insieme H delle soluzioni per $a = 1$.
  Risposta $H = \{(1, 1)\}$ __________ **(pt.1)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 3.11.06

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $M_2(\mathbb{R})$ sono dati $v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Si determinino:

- Il sottospazio $U(\mathbb{R})$ generato dal sistema $S = [v_1, v_2, v_3]$;

  Risposta $U(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha+\beta & 0 \\ 2\alpha+\beta & \alpha-\beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$ ______ **(pt.3)**
- una base B di $U(\mathbb{R})$ e la sua dimensione;

  Risposta $B = (v_1, v_2)$; $\dim U(\mathbb{R}) = 2$ ______ **(pt.2)**
- le componenti in B di $w = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$;

  Risposta $(-1, 2)$ ______ **(pt.2)**
- una base B' di un complemento diretto di $U(\mathbb{R})$.

  Risposta $B' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori del parametro reale k il vettore $v = (k, 0, 3, 2-k)$ appartiene alla chiusura di $H = [(0,0,1,0), (1,0,1,1), (2,1,1,1)]$.
Risposta per $k = 1$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, è dato il sistema A=$[(0,4,1) = v,\ (1,1,0) = u\ (2,-1,4) = w]$. Si dica, se esistono, quali sono le coppie di vettori di A fra loro ortogonali.
Risposta v e w sono ortogonali fra loro ______ **(pt.2)**

Si determinino il coefficiente di Fourier e la proiezione di v lungo u.
Risposta $v_u = 2$ $\vec{v}_u = 2u = (2,2,0)$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} a-3 & 0 \\ 2a-6 & a \\ a-3 & a \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a-3 \\ -6 \\ -a-3 \end{pmatrix}$, al variare del parametro reale a si determinino:

- il rango della matrice A;

  Risposta $a \neq 0 \ \wedge \ a \neq 3 \ \ r(A) = 2$; $a = 0 \ \vee \ a = 3 \ \ r(A) = 1$ ______ **(pt.2)**
- il rango della matrice $A|B$;

  Risposta $a \neq 0 \ \wedge \ a \neq 3 \ \ r(A|B) = 2$; $a = 0 \ \vee \ a = 3 \ \ r(A|B) = 1$ ______ **(pt.3)**
- i valori di a per i quali il sistema AX=B è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni;

  Risposta $a \neq 0 \ \wedge \ a \neq 3$ 1! soluzione; $a = 0 \ \vee \ a = 3$ ∞^1 soluzioni ______ **(pt.3)**
- l'insieme S delle soluzioni per $a = 0$

  Risposta $S = \{(1, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**
- l'insieme H delle soluzioni per $a = 1$.

  Risposta $H = \{(1, -2)\}$ ______ **(pt.1)**

6

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 3.11.06

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $M_2(\mathbb{R})$ sono dati $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
Si determinino:

- Il sottospazio $U(\mathbb{R})$ generato dal sistema $S = [v_1, v_2, v_3]$;
  Risposta $U(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha + 3\beta + 4\gamma & -\alpha + \beta + 4\gamma \\ \alpha + \beta + \gamma & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$ ________ **(pt.3)**
- una base B di $U(\mathbb{R})$ e la sua dimensione;
  Risposta $B = (v_1, v_2, v_3)$; $\dim U(\mathbb{R}) = 3$ ________ **(pt.2)**
- le componenti in B di $w = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$;
  Risposta $(1, 1, 0)$ ________ **(pt.2)**
- una base B' di un complemento diretto di $U(\mathbb{R})$.
  Risposta $B' = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ ________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori del parametro reale k il vettore $v = (2k, k+1, 0, 1)$ appartiene alla chiusura di $H = [(1,2,1,1), (0,0,0,1), (3,0,0,1)]$.
Risposta per $k = -1$ ________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, è dato il sistema A=$[(0,1,2) = v,\ (1,1,1) = u$ $(1,-2,1) = w]$. Si dica, se esistono, quali sono le coppie di vettori di A fra loro ortogonali.
Risposta u, w e v, w sono ortogonali fra loro ________ **(pt.2)**

Si determinino il coefficiente di Fourier e la proiezione di v lungo u.
Risposta $v_u = 1$ $\vec{v}_u = u = (1,1,1)$ ________ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} a+2 & 1 \\ a+2 & a \\ 0 & 1-a \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a+3 \\ 2a+2 \\ 1-a \end{pmatrix}$, al variare del parametro reale a si determinino:

- il rango della matrice A;
  Risposta $a \neq -2 \ \wedge \ a \neq 1 \ \ r(A) = 2$; $a = -2 \ \vee \ a = 1 \ \ r(A) = 1$ ________ **(pt.2)**
- il rango della matrice $A|B$;
  Risposta $a \neq -2 \ \wedge \ a \neq 1 \ \ r(A|B) = 2$; $a = -2 \ \vee \ a = 1 \ \ r(A|B) = 1$ ________ **(pt.3)**
- i valori di a per i quali il sistema AX=B è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni;
  Risposta $a \neq -2 \ \wedge \ a \neq 1$ 1! soluzione; $a = -2 \ \vee a = 1$ ∞^1 soluzioni ________ **(pt.3)**
- l'insieme S delle soluzioni per $a = 1$
  Risposta $S = \{(\alpha, 4 - 3\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.2)**
- l'insieme H delle soluzioni per $a = 0$.
  Risposta $H = \{(1,1)\}$ ________ **(pt.1)**

7

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 3.11.06

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $M_2(\mathbb{R})$ sono dati $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Si determinino:

- Il sottospazio $U(\mathbb{R})$ generato dal sistema $S = [v_1, v_2, v_3]$;

  Risposta $U(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha - 2\beta + 3\gamma \\ 0 & -\alpha+\beta+\gamma \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$ ______ **(pt.3)**

- una base B di $U(\mathbb{R})$ e la sua dimensione;

  Risposta $B = (v_1, v_2, v_3)$ $\dim U(\mathbb{R}) = 3$ ______ **(pt.2)**

- le componenti in B di $w = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

  Risposta $(1, 2, -1)$ ______ **(pt.2)**

- una base B' di un complemento diretto di $U(\mathbb{R})$.

  Risposta $B' = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori del parametro reale k il vettore $v = (2k-2, k+1, 0, 1)$ appartiene alla chiusura di $H = [(1,1,0,1), (1,2,1,1), (0,0,0,1)]$.
Risposta per $k = 3$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, è dato il sistema A=$[(0,-2,4) = v,\ (1,1,-1) = u\ (-1,0,-1) = w]$. Si dica, se esistono, quali sono le coppie di vettori di A fra loro ortogonali.
Risposta u, w sono ortogonali fra loro ______ **(pt.2)**

Si determinino il coefficiente di Fourier e la proiezione di v lungo u.
Risposta $v_u = -2$ $\vec{v}_u = -2u = (-2, -2, 2)$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} a-2 & 1 \\ 0 & a+1 \\ a-2 & -a \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a-1 \\ a+1 \\ -2 \end{pmatrix}$, al variare del parametro reale a si determinino:

- il rango della matrice A;

  Risposta $a \neq 2 \ \wedge \ a \neq -1$ $r(A) = 2$; $a = 2 \ \vee \ a = -1$ $r(A) = 1$ ______ **(pt.2)**

- il rango della matrice $A|B$;

  Risposta $a \neq 2 \ \wedge \ a \neq -1$ $r(A|B) = 2$; $a = 2 \ \vee \ a = -1$ $r(A|B) = 1$ ______ **(pt.3)**

- i valori di a per i quali il sistema AX=B è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni;

  Risposta $a \neq 2 \ \wedge \ a \neq -1$ 1! soluzione; $a = 2 \ \vee \ a = -1$ ∞^1 soluzioni ______ **(pt.3)**

- l'insieme S delle soluzioni per $a = -1$

  Risposta $S = \{(\alpha, 3\alpha - 2) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

- l'insieme H delle soluzioni per $a = 1$.

  Risposta $H = \{(1, 1)\}$ ______ **(pt.1)**

8

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 3.11.06

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $M_2(\mathbb{R})$ sono dati $v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Si determinino:

- Il sottospazio $U(\mathbb{R})$ generato dal sistema $S = [v_1, v_2, v_3]$;

  Risposta $U(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha+\beta \\ -\alpha+\beta & \alpha+3\beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$ ______ **(pt.3)**
- una base B di $U(\mathbb{R})$ e la sua dimensione;

  Risposta $B = (v_1, v_2)$; $\dim U(\mathbb{R}) = 2$ ______ **(pt.2)**
- le componenti in B di $w = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$;

  Risposta $(2, 1)$ ______ **(pt.2)**
- una base B' di un complemento diretto di $U(\mathbb{R})$.

  Risposta $B' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori del parametro reale k il vettore $v = (1, 0, k, 2k-2)$ appartiene alla chiusura di $H = [(1,1,2,1), (1,0,0,0), (1,0,1,1)]$.
Risposta per $k = 2$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, è dato il sistema A=$[(-2,-3,0) = v$, $(1,0,-1) = u$, $(0,2,0) = w]$. Si dica, se esistono, quali sono le coppie di vettori di A fra loro ortogonali.
Risposta u e w sono ortogonali fra loro ______ **(pt.2)**

Si determinino il coefficiente di Fourier e la proiezione di v lungo u.
Risposta $v_u = -1$ $\vec{v}_u = -u = (-1, 0, 1)$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} a-2 & 0 \\ a & a-3 \\ 2 & a-3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2-a \\ -3 \\ a-5 \end{pmatrix}$, al variare del parametro reale a si determinino:

- il rango della matrice A;

  Risposta $a \neq 2 \wedge a \neq 3$ $r(A) = 2$; $a = 2 \vee a = 3$ $r(A) = 1$ ______ **(pt.2)**
- il rango della matrice $A|B$;

  Risposta $a \neq 2 \wedge a \neq 3$ $r(A|B) = 2$; $a = 2 \vee a = 3$ $r(A|B) = 1$ ______ **(pt.3)**
- i valori di a per i quali il sistema AX=B è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni;

  Risposta $a \neq 2 \wedge a \neq 3$ 1! soluzione; $a = 2 \vee a = 3$ ∞^1 soluzioni ______ **(pt.3)**
- l'insieme S delle soluzioni per $a = 2$

  Risposta $S = \{(\alpha, 2\alpha+3) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**
- l'insieme H delle soluzioni per $a = 1$.

  Risposta $H = \{(-1, 1)\}$ ______ **(pt.1)**

9

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - I prova intermedia - 3.11.06

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $M_2(\mathbb{R})$ sono dati $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Si determinino:

- Il sottospazio $U(\mathbb{R})$ generato dal sistema $S = [v_1, v_2, v_3]$;
  Risposta $U(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \alpha+\beta \\ \alpha-2\beta & 0 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$ ______ **(pt.3)**
- una base B di $U(\mathbb{R})$ e la sua dimensione;
  Risposta $B = (v_1, v_2)$; $\dim U(\mathbb{R}) = 2$ ______ **(pt.2)**
- le componenti in B di $w = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$;
  Risposta $(2, -2)$ ______ **(pt.2)**
- una base B' di un complemento diretto di $U(\mathbb{R})$.
  Risposta $B' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si dica per quali valori del parametro reale k il vettore $v = (k, k-2, 0, 2)$ appartiene alla chiusura di $H = [(0,0,0,1), (1,1,1,1), (2,1,0,1)]$.
Risposta per $k = 4$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo, è dato il sistema A=$[(1,1,2) = v$, $(1,1,1) = u$ $(-2,0,1) = w]$. Si dica, se esistono, quali sono le coppie di vettori di A fra loro ortogonali.
Risposta v e w sono ortogonali fra loro ______ **(pt.2)**

Si determinino il coefficiente di Fourier e la proiezione di v lungo u.
Risposta $v_u = 4/3$; $\vec{v}_u = 4/3u = (4/3, 4/3, 4/3)$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} a & a-1 \\ 2 & a-1 \\ a-2 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2a-1 \\ a+1 \\ a-2 \end{pmatrix}$, al variare del parametro reale a si determinino:

- il rango della matrice A;
  Risposta $a \neq 1 \ \wedge \ a \neq 2 \ \ r(A) = 2$; $a = 1 \ \vee \ a = 2 \ \ r(A) = 1$ ______ **(pt.2)**
- il rango della matrice $A|B$;
  Risposta $a \neq 1 \ \wedge \ a \neq 2 \ \ r(A|B) = 2$; $a = 1 \ \vee \ a = 2 \ \ r(A|B) = 1$ ______ **(pt.3)**
- i valori di a per i quali il sistema AX=B è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni;
  Risposta $a \neq 1 \ \wedge \ a \neq 2$ 1! soluzione; $a = 1 \ \vee \ a = 2$ ∞^1 soluzioni ______ **(pt.3)**
- l'insieme S delle soluzioni per $a = 1$
  Risposta $S = \{(1, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**
- l'insieme H delle soluzioni per $a = 0$.
  Risposta $H = \{(1, 1)\}$ ______ **(pt.1)**