

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 5° appello - 03.09.08

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino, al variare del parametro reale k , le matrici

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & 2 & 0 \\ k+1 & 1 & 2 \\ k+1 & 0 & k+1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- Si determini, al variare di k , il rango della matrice A e si stabilisca per quali valori di k A è invertibile.

Risposta invertibile: $k \neq \pm 1$; $k \neq \pm 1$ $\rho(A) = 3$, $k = \pm 1$ $\rho(A) = 2$ _____ (pt.3)

Posto ora $k = 0$ si determinino:

- la matrice A^{-1} inversa di A ;

Risposta $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ _____ (pt.3)

- l'insieme S delle soluzioni del sistema lineare $AX = B$;

Risposta $S = \{(6, 3, -4)\}$ _____ (pt.2)

- gli autovalori della matrice A ;

Risposta $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{2}$ _____ (pt.3)

- una base e la dimensione dell'autospazio $V_{\bar{\lambda}}$ dove $\bar{\lambda}$ è l'autovalore intero di A .

Risposta $B = ((-2, 0, 1))$; $\dim V_{-1} = 1$ _____ (pt.2)

- il complemento ortogonale di $V_{\bar{\lambda}}$.

Risposta $V_{-1}^{\perp} = \{\alpha, \beta, 2\alpha\} \in \mathbb{R}^3, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 2. In $E_3(\mathbb{R})$ si consideri la sfera $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$. Si determinino:

- centro e raggio della sfera Σ ;

Risposta $C = (1, 1, 1)$, $R = \sqrt{3}$ _____ (pt.2)

- centro e raggio della circonferenza \mathcal{C} individuata dall'intersezione tra Σ e il piano $\pi : x + y - z - 2 = 0$;

Risposta $r = 2\sqrt{2/3}$, $C' = (4/3, 4/3, 2/3)$ _____ (pt.3)

- una rappresentazione cartesiana della retta tangente a \mathcal{C} nel suo punto $P = (2, 2, 2)$;

Risposta $x + y + z - 6 = 0 = x + y - z - 2$ _____ (pt.3)

- un'equazione cartesiana dei piani tangenti a Σ e contenenti la retta $r : x - 3 = 0 = y + z - 2$.

Risposta $\pm\sqrt{6}x + y + z - 2 \mp 3\sqrt{6} = 0$ _____ (pt.3)

- un'equazione cartesiana dei piani tangenti a Σ e paralleli al piano π .

Risposta $x + y - z + 2 = 0$, $x + y - z - 4 = 0$ _____ (pt.3)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 5° appello - 03.09.08

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 3. Si considerino, al variare del parametro reale k , le matrici

$$A = \begin{pmatrix} k+1 & 4 & 0 \\ k+2 & 1 & 2 \\ k+1 & 0 & k+1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

- Si determini, al variare di k , il rango della matrice A e si stabilisca per quali valori di k A è invertibile.

Risposta invertibile: $k \neq -1, 1/3$; $k \neq -1, 1/3$ $\rho(A) = 3$, $k = -1, 3$ $\rho(A) = 2$ _____ (pt.3)

Posto ora $k = 0$ si determinino:

- la matrice A^{-1} inversa di A ;

Risposta $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & -7 \end{pmatrix}$ _____ (pt.3)

- l'insieme S delle soluzioni del sistema lineare $AX = B$;

Risposta $S = \{(9, -2, -8)\}$ _____ (pt.2)

- gli autovalori della matrice A ;

Risposta $\lambda_1 = -1$, $\lambda_{2,3} = 2 \pm \sqrt{5}$ _____ (pt.3)

- una base e la dimensione dell'autospazio $V_{\bar{\lambda}}$ dove $\bar{\lambda}$ è l'autovalore intero di A .

Risposta $B = ((-2, 1, 1))$; $\dim V_{-1} = 1$ _____ (pt.2)

- il complemento ortogonale di $V_{\bar{\lambda}}$.

Risposta $V_{-1}^\perp = \{\alpha, \beta, 2\alpha - \beta\} \in \mathbb{R}^3, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 4. In $E_3(\mathbb{R})$ si consideri la sfera $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z = 0$. Si determinino:

- centro e raggio della sfera Σ ;

Risposta $C = (-1, -1, -1)$, $R = \sqrt{3}$ _____ (pt.2)

- centro e raggio della circonferenza \mathcal{C} individuata dall'intersezione tra Σ e il piano $\pi : x + y - z + 2 = 0$;

Risposta $r = 2\sqrt{2/3}$, $C' = (-4/3, -4/3, -2/3)$ _____ (pt.3)

- una rappresentazione cartesiana della retta tangente a \mathcal{C} nel suo punto $P = (-2, -2, -2)$;

Risposta $x + y + z + 6 = 0 = x + y - z + 2$ _____ (pt.3)

- un'equazione cartesiana dei piani tangenti a Σ e contenenti la retta $r : x + 3 = 0 = y + z + 2$.

Risposta $\pm\sqrt{6}x + y + z + 2 \pm 3\sqrt{6} = 0$ _____ (pt.3)

- un'equazione cartesiana dei piani tangenti a Σ e paralleli al piano π .

Risposta $x + y - z + 2 = 0$, $x + y - z - 4 = 0$ _____ (pt.3)