1

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 4^o appello - 10.07.08

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & k+1 & 3 \\ k-1 & 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k-1 \\ 2 \\ 2k-2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix}^t.$$

dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di k per i quali il sistema lineare $AX = B$ è compatibile, e per tali valori il numero di soluzioni.
  Risposta $k = 1$ ∞^2 soluzioni, $k \neq \pm 1$ ∞^1 soluzioni ______ **(pt.3)**

Posto ora $k = 0$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema $AX = B$ e si dica, motivando la risposta, se S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$;
  Risposta $S = \{(2-\alpha, \alpha+1, -4, \alpha) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ non è sottospazio ______ **(pt.2)**
- una base e la dimensione di $U = \mathcal{L}(S)$.
  Risposta $\mathcal{B}_U = ((2,1,-4,0), (-1,1,0,1))$, $\dim U = 2$ ______ **(pt.2)**
- una base ortogonale di U rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4$.
  Risposta $\mathcal{B}'_U = ((2,1,-4,0), (-19/21, 22/21, -4/21, 1))$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi:

$$U = \{(\alpha+2\beta, -\beta, \alpha+\beta) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}, \quad W = \{(\alpha-\gamma, -\alpha+\gamma, \beta+\gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Si determinino:

- una base e la dimensione di U e di W;
  Risposta $\dim U = \dim W = 2$, $\mathcal{B}_U = ((1,0,1), (2,-1,1))$, $\mathcal{B}_W = ((1,-1,0), (0,0,1))$ ______ **(pt.3)**
- una base e la dimensione di $U + W$ e si stabilisca se la somma è diretta;
  Risposta $\dim(U+W) = 3$, $\mathcal{B}_{U+W} = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$, $\dim(U \cap W) = 1$, $\mathcal{B}_{U \cap W} = ((1,-1,0))$ ______ **(pt.4)**
- il complemento ortogonale di U rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^3$.
  Risposta $U^\perp = \mathcal{L}((-1,-1,1))$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino le due rette $a:\ x+y = 0 = z$ ed $r:\ 2x-y-2 = 0 = 2x-y-2z+2$. Si determinino

- la mutua posizione delle due rette r ed a, giustificando la risposta;
  Risposta sghembe ______ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana dei due piani paralleli che contengono r ed a e la distanza tra tali rette;
  Risposta $z = 0$, $z = 2$, $d(a,r) = 2$ ______ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana della retta passante per $P = (0,0,1)$ e incidente sia r che a;
  Risposta $2x - 2z - y + 2 = 0 = x + y$ ______ **(pt.3)**
- un'equazione cartesiana del luogo descritto dalla retta r nella rotazione di asse a, e si dica di che luogo si tratta.
  Risposta $4x^2 + 4y^2 - z^2 - 10xy - 12x + 12y + 12 = 0$, iperboloide iperbolico ______ **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 4^o appello - 10.07.08

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 4. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & k+1 & 1 \\ 3 & 3 & k & 0 \\ k-2 & k-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k \\ 2 \\ 2k-4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix}^t.$$

dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di k per i quali il sistema lineare $AX = B$ è compatibile, e per tali valori il numero di soluzioni.
  Risposta $k = 2$ ∞^2 soluzioni, $k \neq 0, 2$ ∞^1 soluzioni **(pt.3)**

Posto ora $k = 1$ si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema $AX = B$ e si dica, motivando la risposta, se S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$;
  Risposta $S = \{(3-\alpha, \alpha-1, -4, \alpha) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ non è sottospazio **(pt.2)**
- una base e la dimensione di $U = \mathcal{L}(S)$.
  Risposta $\mathcal{B}_U = ((3,-1,-4,0), (-1,1,0,1))$, $\dim U = 2$ **(pt.2)**
- una base ortogonale di U rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4$.
  Risposta $\mathcal{B}'_U = ((-1,1,0,1), (5/3, 1/3, -4, 4/3))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ si considerino i sottospazi:

$$U = \{(3\alpha+2\beta, 2\alpha+\beta, -\alpha-\beta) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}, \quad W = \{(\alpha-\gamma, \alpha+\beta+\gamma, -\alpha+\gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Si determinino:

- una base e la dimensione di U e di W;
  Risposta $\dim U = \dim W = 2$, $\mathcal{B}_U = ((3,2,-1), (2,1,-1))$, $\mathcal{B}_W = ((1,1,-1), (0,1,0))$ **(pt.3)**
- una base e la dimensione di $U + W$ e si stabilisca se la somma è diretta;
  Risposta $\dim(U+W) = 3$, $\mathcal{B}_{U+W} = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$, $\dim(U \cap W) = 1$, $\mathcal{B}_{U \cap W} = ((1,0,-1))$ **(pt.4)**
- il complemento ortogonale di U rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^3$.
  Risposta $U^\perp = \mathcal{L}((1,-1,1))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino le due rette $a: \ x+y-1 = 0 = z$ ed $r: \ 2x-y+2 = 0 = 2x-y-2z+6$. Si determinino

- la mutua posizione delle due rette r ed a, giustificando la risposta;
  Risposta sghembe **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana dei due piani paralleli che contengono r ed a e la distanza tra tali rette;
  Risposta $z = 0$, $z = 2$, $d(a, r) = 2$ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana della retta passante per $P = (-1, 2, 1)$ e incidente sia r che a;
  Risposta $2x - y - 2z + 6 = 0 = x + y - 1$ **(pt.3)**
- un'equazione cartesiana del luogo descritto dalla retta r nella rotazione di asse a, e si dica di che luogo si tratta.
  Risposta $4x^2 + 4y^2 - z^2 - 10xy + 16x - 14y + 16 = 0$, iperboloide iperbolico **(pt.4)**