1

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 3^o appello - 02.04.08

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino il sistema lineare reale

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2y - z = 2 \\ x + y - z = 3 \\ -x + 3y - z = 1 \end{cases}$$

e il sottospazio $W = \{(2\beta + 2\gamma, \alpha - 5\beta - 3\gamma, \alpha + 2\gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$. Si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema lineare, dopo aver verificato che è compatibile;

  Risposta $S = \{(\frac{4+z}{2}, \frac{2+z}{2}, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**
- dopo aver osservato che S non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, si determinino una base e la dimensione di $V = \mathcal{L}(S)$ e di W;

  Risposta $\mathcal{B}_V = ((2,1,0),(1,1,2)),\ \mathcal{B}_W = ((0,1,1),(2,-5,0)),\ \dim V = \dim W = 2$ **(pt.2)**
- Si dica, motivando la risposta, se $V + W$ è diretta.

  Risposta La somma non è diretta perchè $\dim V = \dim W = 2$ e $\dim(V+W) = 3$ implica $\dim V \bigcap W = 1$, quindi l'intersezione è non banale. **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Date la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 8 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ si determinino:

- gli autovalori della matrice A;

  Risposta $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$ **(pt.3)**
- gli autospazi della matrice A con la relativa dimensione;

  Risposta $\dim(V_{\lambda_1}) = \dim(V_{\lambda_2}) = \dim(V_{\lambda_3}) = 1,\ V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((1,-2,0)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((1,-4,0)),$ $V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((1,-3,1))$ **(pt.3)**
- si verifichi se l'unione delle basi degli autospazi trovati è libera. Nel caso lo sia, si scriva una base di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ costituita da autovettori di A.

  Risposta $\mathcal{B} = ((1,-2,0),(1,-4,0),(1,-3,1))$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino la sfera $\Sigma_k:\ x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2(k+1)y - 6z + k = 0$, dove k è un parametro reale, e il piano $\pi:\ x + y + z - 6 = 0$.

- Si determinino i valori di k per cui la sfera Σ_k ha raggio pari a $\sqrt{21}$;

  Risposta $k = 1 \lor k = -2$ **(pt.3)**

Posto ora $k = 2$ si determinino:

- centro e raggio della sfera Σ_2;

  Risposta $C = (3,-3,3),\ R = 5$ **(pt.2)**
- le equazione cartesiane dei piani tangenti a Σ_2 e paralleli a π;

  Risposta $x + y + z - 3 \pm 5\sqrt{3} = 0$ **(pt.3)**
- il centro e il raggio della circonferenza individuata da Σ_2 e dal piano π.

  Risposta $C' = (4,-2,4),\ r = \sqrt{22}$ **(pt.4)**

2

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 3^o appello - 02.04.08

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 4. Si considerino il sistema lineare reale

$$\begin{cases} -y+z=1 \\ -x+2y=2 \\ -3x+7y-z=5 \\ -x+3y-z=1 \end{cases}$$

e il sottospazio $W=\{(\beta+2\gamma, 3\alpha+2\beta+\gamma, 2\beta+4\gamma)\in\mathbb{R}^3 \mid \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}\}$ di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$. Si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema lineare, dopo aver verificato che è compatibile;

  Risposta $S=\{(2\alpha-4,\alpha-1,\alpha)\in\mathbb{R}^3 \mid \alpha\in\mathbb{R}\}$ **(pt.3)**
- dopo aver osservato che S non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, si determinino una base e la dimensione di $V=\mathcal{L}(S)$ e di W;

  Risposta $\mathcal{B}_V=((2,1,1),(4,1,0)),\ \mathcal{B}_W=((0,3,0),(1,2,2)),\ \dim V=\dim W=2$ **(pt.2)**
- Si dica, motivando la risposta, se $V+W$ è diretta.

  Risposta La somma non è diretta perchè dim$V$=dim$W$=2 e dim$(V+W)$=3 implica dim$V\bigcap W$=1, quindi l'intersezione è non banale. **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. Date la matrice $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&3&-5\\0&0&4\end{pmatrix}$ si determinino:

- gli autovalori della matrice A;

  Risposta $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=4$ **(pt.3)**
- gli autospazi della matrice A con la relativa dimensione;

  Risposta $\dim(V_{\lambda_1})=\dim(V_{\lambda_2})=\dim(V_{\lambda_3})=1,\ V_{\lambda_1}=\mathcal{L}((1,-1,0)),\ V_{\lambda_2}=\mathcal{L}((1,-2,0)),$ $V_{\lambda_3}=\mathcal{L}((1,-3,1))$ **(pt.3)**
- si verifichi se l'unione delle basi degli autospazi trovati è libera. Nel caso lo sia, si scriva una base di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ costituita da autovettori di A.

  Risposta $\mathcal{B}=((1,-1,0),(1,-2,0),(1,-3,1))$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 6. In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino la sfera $\Sigma_k:\ x^2+y^2+z^2-10x-2(k+2)y-4z+12+k=0$, dove k è un parametro reale, e il piano $\pi:\ x-y+z-7=0$.

- Si determinino i valori di k per cui la sfera Σ_k ha raggio pari a $\sqrt{21}$;

  Risposta $k=-3\ \vee\ k=0$ **(pt.3)**

  Posto ora $k=1$ si determinino:
- centro e raggio della sfera Σ_1;

  Risposta $C=(5,3,2),\ R=5$ **(pt.2)**
- le equazione cartesiane dei piani tangenti a Σ_1 e paralleli a π;

  Risposta $x-y+z-4\pm5\sqrt{3}=0$ **(pt.3)**
- il centro e il raggio della circonferenza individuata da Σ_1 e dal piano π.

  Risposta $C'=(6,2,3),\ r=\sqrt{22}$ **(pt.4)**

3

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 3^o appello - 02.04.08

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 7. Si considerino il sistema lineare reale

$$\begin{cases} 2x - z = 4 \\ -y + z = 2 \\ 2x - y = 6 \\ 2x + y - 2z = 2 \end{cases}$$

e il sottospazio $W = \{(2\beta + \gamma, -2\alpha - 2\beta - 2\gamma, \alpha + \beta + \gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$ di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$. Si determinino:

- l'insieme S delle soluzioni del sistema lineare, dopo aver verificato che è compatibile;

  Risposta $S = \{(\frac{4+\alpha}{2}, \alpha - 2, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

- dopo aver osservato che S non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, si determinino una base e la dimensione di $V = \mathcal{L}(S)$ e di W;

  Risposta $\mathcal{B}_V = ((1, -1, 0), (1, 2, 2)),\ \mathcal{B}_W = ((0, 2, -1), (2, -2, 1)),\ \dim V = \dim W = 2$ **(pt.2)**

- Si dica, motivando la risposta, se $V + W$ è diretta.

  Risposta La somma non è diretta perchè $\dim V{=}\dim W{=}2$ e $\dim(V{+}W){=}3$ implica $\dim V \bigcap W{=}1$, quindi l'intersezione è non banale. **(pt.3)**

ESERCIZIO 8. Date la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ si determinino:

- gli autovalori della matrice A;

  Risposta $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2$ **(pt.3)**

- gli autospazi della matrice A con la relativa dimensione;

  Risposta $\dim(V_{\lambda_1}) = \dim(V_{\lambda_2}) = \dim(V_{\lambda_3}) = 1,\ V_{\lambda_1} = \mathcal{L}((-2, 1, 0)),\ V_{\lambda_2} = \mathcal{L}((0, 1, 0)),$
  $V_{\lambda_3} = \mathcal{L}((-2, 1, 1))$ **(pt.3)**

- si verifichi se l'unione delle basi degli autospazi trovati è libera. Nel caso lo sia, si scriva una base di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ costituita da autovettori di A.

  Risposta $\mathcal{B} = ((-2, 1, 0), (0, 1, 0), (-2, 1, 1))$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 9. In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino la sfera $\Sigma_k :\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2(k-1)y + 6z - 5 - k = 0$, dove k è un parametro reale, e il piano $\pi :\ x + y - z - 5 = 0$.

- Si determinino i valori di k per cui la sfera Σ_k ha raggio pari a $\sqrt{21}$;

  Risposta $k = 2 \ \vee \ k = -1$ **(pt.3)**

Posto ora $k = -2$ si determinino:

- centro e raggio della sfera Σ_{-2};

  Risposta $C = (2, 3, -3),\ R = 5$ **(pt.2)**

- le equazione cartesiane dei piani tangenti a Σ_{-2} e paralleli a π;

  Risposta $x + y - z - 8 \pm 5\sqrt{3} = 0$ **(pt.3)**

- il centro e il raggio della circonferenza individuata da Σ_{-2} e dal piano π.

  Risposta $C' = (1, 2, -2),\ r = \sqrt{22}$ **(pt.4)**