1

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 28.11.07

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si determinino:

- gli autovalori della matrice A;

  Risposta $t_1 = 1,\ t_2 = 2$ ______ **(pt.3)**

- l'autospazio W relativo all'autovalore minore e una base di W;

  Risposta $W = \{(-2\alpha, \alpha, 2\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\},\ B = ((-2, 1, 2))$ ______ **(pt.3)**

- Una base ortonormale di $W^\perp$.

  Risposta $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right), \left(\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{-2}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right)$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & k \\ 3 & k+3 & 0 \\ -3 & 3 & k \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3k+3 \\ 9 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice A;

  Risposta $k = 0 \vee k = -3\ \rho(A) = 2;\ k \neq 0 \wedge k \neq -3\ \rho(A) = 3$ ______ **(pt.2)**

- il rango della matrice $A|B$;

  Risposta $k = 0\ \rho(A|B) = 2;\ k \neq 0\ \rho(A|B) = 3$ ______ **(pt.3)**

- i valori di k per cui il sistema $AX = B$ è compatibile, e per tali valori il numero di soluzioni;

  Risposta $k = 0\ \infty^1$ soluzioni; $k \neq 0 \wedge k \neq -3\ \exists!$ soluzione ______ **(pt.3)**

- interpretando x, y, z come coordinate cartesiane ortogonali in $E_3(\mathbb{R})$, la mutua posizione dei piani rappresentati dalle equazioni del sistema lineare.

  Risposta $k = 0$ i piani hanno una retta in comune: appartengono ad un fascio proprio;
  $k = -3$ i piani sono a due a due incidenti secondo rette parallele: individuano una stella impropria;
  $k \neq 0 \wedge k \neq -3$ i piani hanno un punto comune: individuano una stella propria. ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati i punti $P = (-1, 0, 2)$ e $Q = (1, 1, -1)$, e il piano $\pi : x + y + z - 7 = 0$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana della retta r passante per P e ortogonale a π;

  Risposta $x - y + 1 = 0 = z - y - 2$ ______ **(pt.2)**

- le coordinate del punto P' proiezione di P sul piano π e del punto P'' simmetrico di P rispetto a π;

  Risposta $P' = (1, 2, 4),\ P'' = (3, 4, 6)$ ______ **(pt.3)**

- un'equazione cartesiana del piano σ passante per P e parallelo a π;

  Risposta $x + y + z - 1 = 0$ ______ **(pt.2)**

- un'equazione cartesiana del piano α individuato dalla retta r e dal punto Q.

  Risposta $4x - 5y + z + 2 = 0$ ______ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 28.11.07

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 6 & -5 & 0 \\ 5 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si determinino:

- gli autovalori della matrice A;

  Risposta $t_1 = -2,\ t_2 = 1$ **(pt.3)**

- l'autospazio W relativo all'autovalore maggiore e una base di W;

  Risposta $W = \{(\alpha, \alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\},\ B = ((1, 1, 1))$ **(pt.3)**

- Una base ortonormale di $W^\perp$.

  Risposta $\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right)$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k \\ 1 & k+1 & 0 \\ -1 & 1 & k \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3k+1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice A;

  Risposta $k = 0 \vee k = -1\ \rho(A) = 2;\ k \neq 0 \wedge k \neq -1\ \rho(A) = 3$ **(pt.2)**

- il rango della matrice $A|B$;

  Risposta $k = 0\ \rho(A|B) = 2;\ k \neq 0\ \rho(A|B) = 3$ **(pt.3)**

- i valori di k per cui il sistema $AX = B$ è compatibile, e per tali valori il numero di soluzioni;

  Risposta $k = 0\ \infty^1$ soluzioni; $k \neq 0 \wedge k \neq -1\ \exists!$ soluzione **(pt.3)**

- interpretando x, y, z come coordinate cartesiane ortogonali in $E_3(\mathbb{R})$, la mutua posizione dei piani rappresentati dalle equazioni del sistema lineare.

  Risposta $k = 0$ i piani hanno una retta in comune: appartengono ad un fascio proprio;
  $k = -1$ i piani sono a due a due incidenti secondo rette parallele: individuano una stella impropria;
  $k \neq 0 \wedge k \neq -1$ i piani hanno un punto comune: individuano una stella propria. **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati i punti $P = (-2, -1, 1)$ e $Q = (0, 0, -1/2)$, e il piano $\pi : x+y+2z-5 = 0$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana della retta r passante per P e ortogonale a π;

  Risposta $x - y + 1 = 0 = 2y - z + 3$ **(pt.2)**

- le coordinate del punto P' proiezione di P sul piano π e del punto P'' simmetrico di P rispetto a π;

  Risposta $P' = (-1, 0, 3),\ P'' = (0, 1, 5)$ **(pt.3)**

- un'equazione cartesiana del piano σ passante per P e parallelo a π;

  Risposta $x + y + 2z + 1 = 0$ **(pt.2)**

- un'equazione cartesiana del piano α individuato dalla retta r e dal punto Q.

  Risposta $7x - 11y + 2z + 1 = 0$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 28.11.07

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 2 \end{pmatrix}$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si determinino:

- gli autovalori della matrice A;

  Risposta $t_1 = -1,\ t_2 = 2$ __________ **(pt.3)**
- l'autospazio W relativo all'autovalore minore e una base di W;

  Risposta $W = \{(-2\alpha, \alpha, 2\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\},\ B = ((-2, 1, 2))$ __________ **(pt.3)**
- Una base ortonormale di $W^{\perp}$.

  Risposta $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right), \left(\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{-2}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right)$ __________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & k+1 \\ 2 & k+3 & -k-1 \\ -1 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3k+1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice A;

  Risposta $k = -1 \vee k = -2\ \rho(A) = 2;\ k \neq -1 \wedge k \neq -2\ \rho(A) = 3$ __________ **(pt.2)**
- il rango della matrice $A|B$;

  Risposta $k = -1\ \rho(A|B) = 2;\ k \neq -1\ \rho(A|B) = 3$ __________ **(pt.3)**
- i valori di k per cui il sistema $AX = B$ è compatibile, e per tali valori il numero di soluzioni;

  Risposta $k = -1\ \infty^1$ soluzioni; $k \neq -1 \wedge k \neq -2\ \exists!$ soluzione __________ **(pt.3)**
- interpretando x, y, z come coordinate cartesiane ortogonali in $E_3(\mathbb{R})$, la mutua posizione dei piani rappresentati dalle equazioni del sistema lineare.

  Risposta $k = -1$ i piani hanno una retta in comune: appartengono ad un fascio proprio;
  $k = -2$ i piani sono a due a due incidenti secondo rette parallele: individuano una stella impropria;
  $k \neq -1 \wedge k \neq -2$ i piani hanno un punto comune: individuano una stella propria. __________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati i punti $P = (1, -1, 4)$ e $Q = (-1, 0, 1)$, e il piano $\pi : x - y - z + 8 = 0$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana della retta r passante per P e ortogonale a π;

  Risposta $x + y = 0 = x + z - 5$ __________ **(pt.2)**
- le coordinate del punto P' proiezione di P sul piano π e del punto P'' simmetrico di P rispetto a π;

  Risposta $P' = (-1, 1, 6),\ P'' = (-3, 3, 8)$ __________ **(pt.3)**
- un'equazione cartesiana del piano σ passante per P e parallelo a π;

  Risposta $x - y - z + 2 = 0$ __________ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana del piano α individuato dalla retta r e dal punto Q.

  Risposta $4x + 5y - z + 5 = 0$ __________ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 28.11.07

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si determinino:

- gli autovalori della matrice A;

  Risposta $t_1 = 1,\ t_2 = 3$ ______ **(pt.3)**

- l'autospazio W relativo all'autovalore maggiore e una base di W;

  Risposta $W = \{(-\alpha, \alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\},\ B = ((-1, 1, 1))$ ______ **(pt.3)**

- Una base ortonormale di $W^\perp$.

  Risposta $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)\right)$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2(k-1) \\ 1 & k & 0 \\ -1 & 1 & k-1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3k-2 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice A;

  Risposta $k = 0 \vee k = 1\ \rho(A) = 2;\ k \neq 0 \wedge k \neq 1\ \rho(A) = 3$ ______ **(pt.2)**

- il rango della matrice $A|B$;

  Risposta $k = 1\ \rho(A|B) = 2;\ k \neq 1\ \rho(A|B) = 3$ ______ **(pt.3)**

- i valori di k per cui il sistema $AX = B$ è compatibile, e per tali valori il numero di soluzioni;

  Risposta $k = 1\ \infty^1$ soluzioni; $k \neq 0 \wedge k \neq 1\ \exists!$ soluzione ______ **(pt.3)**

- interpretando x, y, z come coordinate cartesiane ortogonali in $E_3(\mathbb{R})$, la mutua posizione dei piani rappresentati dalle equazioni del sistema lineare.

  Risposta $k = 1$ i piani hanno una retta in comune: appartengono ad un fascio proprio;
  $k = 0$ i piani sono a due a due incidenti secondo rette parallele: individuano una stella impropria;
  $k \neq 0 \wedge k \neq 1$ i piani hanno un punto comune: individuano una stella propria. ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati i punti $P = (1, 0, 1)$ e $Q = (3, -1, -2)$, e il piano $\pi : x - y + z - 8 = 0$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana della retta r passante per P e ortogonale a π;

  Risposta $x + y - 1 = 0 = y + z - 1$ ______ **(pt.2)**

- le coordinate del punto P' proiezione di P sul piano π e del punto P'' simmetrico di P rispetto a π;

  Risposta $P' = (3, -2, 3),\ P'' = (5, -4, 5)$ ______ **(pt.3)**

- un'equazione cartesiana del piano σ passante per P e parallelo a π;

  Risposta $x - y + z - 2 = 0$ ______ **(pt.2)**

- un'equazione cartesiana del piano α individuato dalla retta r e dal punto Q.

  Risposta $4x + 5y + z - 5 = 0$ ______ **(pt.3)**

5

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 28.11.07

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si determinino:

- gli autovalori della matrice A;

  Risposta $t_1 = -1,\ t_2 = 1$ **(pt.3)**
- l'autospazio W relativo all'autovalore minore e una base di W;

  Risposta $W = \{(-2\alpha, \alpha, 2\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\},\ B = ((-2, 1, 2))$ **(pt.3)**
- Una base ortonormale di $W^\perp$.

  Risposta $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right), \left(\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{-2}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right)$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & k+2 \\ 2 & 2k+2 & -k-2 \\ -1 & 3 & k+2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3k+4 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice A;

  Risposta $k = -2 \vee k = -3\ \rho(A) = 2;\ k \neq -2 \wedge k \neq -3\ \rho(A) = 3$ **(pt.2)**
- il rango della matrice $A|B$;

  Risposta $k = -2\ \rho(A|B) = 2;\ k \neq -2\ \rho(A|B) = 3$ **(pt.3)**
- i valori di k per cui il sistema $AX = B$ è compatibile, e per tali valori il numero di soluzioni;

  Risposta $k = -2\ \infty^1$ soluzioni; $k \neq -2 \wedge k \neq -3\ \exists!$ soluzione **(pt.3)**
- interpretando x, y, z come coordinate cartesiane ortogonali in $E_3(\mathbb{R})$, la mutua posizione dei piani rappresentati dalle equazioni del sistema lineare.

  Risposta $k = -2$ i piani hanno una retta in comune: appartengono ad un fascio proprio;
  $k = -3$ i piani sono a due a due incidenti secondo rette parallele: individuano una stella impropria;
  $k \neq -2 \wedge k \neq -3$ i piani hanno un punto comune: individuano una stella propria. **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati i punti $P = (1, -2, -2)$ e $Q = (-1, -1, 1)$, e il piano $\pi : x - y + z + 5 = 0$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana della retta r passante per P e ortogonale a π;

  Risposta $x + y + 1 = 0 = x - z - 3$ **(pt.2)**
- le coordinate del punto P' proiezione di P sul piano π e del punto P'' simmetrico di P rispetto a π;

  Risposta $P' = (-1, 0, -4),\ P'' = (-3, 2, -6)$ **(pt.3)**
- un'equazione cartesiana del piano σ passante per P e parallelo a π;

  Risposta $x - y + z - 1 = 0$ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana del piano α individuato dalla retta r e dal punto Q.

  Risposta $4x + 5y + z + 8 = 0$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello - 28.11.07

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & -6 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si determinino:

- gli autovalori della matrice A;

  Risposta $t_1 = -2,\ t_2 = 1$ ________________ **(pt.3)**
- l'autospazio W relativo all'autovalore minore e una base di W;

  Risposta $W = \{(-2\alpha, \alpha, 2\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\},\ B = ((-2,1,2))$ ________________ **(pt.3)**
- Una base ortonormale di $W^\perp$.

  Risposta $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right), \left(\frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{-2}{3\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right)$ ________________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2(k-2) \\ 1 & k-1 & 0 \\ -1 & 1 & k-2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3k-5 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Al variare del parametro reale k si determinino:

- il rango della matrice A;

  Risposta $k = 1 \vee k = 2\ \rho(A) = 2;\ k \neq 1 \wedge k \neq 2\ \rho(A) = 3$ ________________ **(pt.2)**
- il rango della matrice $A|B$;

  Risposta $k = 2\ \rho(A|B) = 2;\ k \neq 2\ \rho(A|B) = 3$ ________________ **(pt.3)**
- i valori di k per cui il sistema $AX = B$ è compatibile, e per tali valori il numero di soluzioni;

  Risposta $k = 2\ \infty^1$ soluzioni; $k \neq 1 \wedge k \neq 2\ \exists!$ soluzione ________________ **(pt.3)**
- interpretando x, y, z come coordinate cartesiane ortogonali in $E_3(\mathbb{R})$, la mutua posizione dei piani rappresentati dalle equazioni del sistema lineare.

  Risposta $k = 2$ i piani hanno una retta in comune: appartengono ad un fascio proprio;
  $k = 1$ i piani sono a due a due incidenti secondo rette parallele: individuano una stella impropria;
  $k \neq 1 \wedge k \neq 2$ i piani hanno un punto comune: individuano una stella propria. ________________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati i punti $P = (0,-2,2)$ e $Q = (2,-1,-1)$, e il piano $\pi : x + y + z - 6 = 0$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana della retta r passante per P e ortogonale a π;

  Risposta $x - y - 2 = 0 = x - z + 2$ ________________ **(pt.2)**
- le coordinate del punto P' proiezione di P sul piano π e del punto P'' simmetrico di P rispetto a π;

  Risposta $P' = (2,0,4),\ P'' = (4,2,6)$ ________________ **(pt.3)**
- un'equazione cartesiana del piano σ passante per P e parallelo a π;

  Risposta $x + y + z = 0$ ________________ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana del piano α individuato dalla retta r e dal punto Q.

  Risposta $4x - 5y + z - 12 = 0$ ________________ **(pt.3)**