1

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 31.08.2009

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Date le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k+2 \end{pmatrix}$ e $B_k = \begin{pmatrix} k \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, si determinino:

- la dimensione dello spazio $\mathcal{L}(\mathcal{R})$ delle righe di A_k;

  Risposta $k \neq 0, -2$: dim$\mathcal{L}(\mathcal{R})$=3, $k = 0$: dim$\mathcal{L}(\mathcal{R})$=1, $k = -2$: dim$\mathcal{L}(\mathcal{R})$=2 **(pt.2)**

- la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema $A_k X = 0$;

  Risposta $k \neq 0, -2$: dim$S$=0, $k = 0$: dim$S$=2, $k = -2$: dim$S$=1 **(pt.2)**

- il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(\mathcal{R})$, posto $k = 0$, rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^3$;

  Risposta $\{(a, b, 0) \in \mathbb{R}^3, a, b \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**

- i valori di k per i quali $A_k X = B_k$ risulta compatibile;

  Risposta $k \neq 0$ **(pt.2)**

- gli autovalori di A_k con le relative molteplicità algebrica e geometrica e i valori reali di k per i quali A_k risulta diagonalizzabile.

  Risposta $k, -k, k+2$; $k \neq 0, -1$: $m_a(\lambda) = m_g(\lambda) = 1$; $k = 0$: $m_a(0) = m_g(0) = 2$, $m_a(2) = m_g(2) = 1$; $k = -1$: $m_a(-1) = m_g(-1) = 1$, $m_a(1) = 2$, $m_g(1) = 2$.
  Diagonalizzabile per ogni valore di k **(pt.3)**

Posto $k = 1$ si determinino:

- le soluzioni di $A_1 X = B_1$;

  Risposta $(3, 1, 0)$ **(pt.2)**

- una base di autovettori di A_1.

  Risposta $((1, 1, 0), (1, -1, 0), (0, 0, 1))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica generale $\mathcal{C} : 3x^2 + y^2 + 4xy + 2x + 2y - 1 = 0$.
Nel caso $\mathcal{C}$ sia una parabola, se ne determinino centro improprio, asse, vertice e tangente nel vertice.
Nel caso $\mathcal{C}$ sia una conica a centro, se ne determinino punti impropri, assi e centro.

Risposta Iperbole; punti impropri: $[(1, -1, 0)], [(1, -3, 0)]$, assi: $2x - (1 \pm \sqrt{5})y = -3 \mp \sqrt{5}$, centro: $(-1, 1)$. **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono dati la retta $r_k : \begin{cases} x + ky + kz = 1 \\ kx + y + kz = k^2 \end{cases}$ ed il punto $P = (2, 1, 1)$. Si dica per quali valori reali di k la retta data esiste e per quali è propria.

Risposta la retta esiste per $k \neq 1$ ed è propria per $k \neq 1$ **(pt.2)**

Posto $k = 0$ si determinino rappresentazioni cartesiane

- del piano per P contenente r;

  Risposta $x - y - 1 = 0$ **(pt.2)**

- della retta per P incidente r e ad essa ortogonale;

  Risposta $\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$ **(pt.3)**

- della superficie generata dalla rotazione dell'asse delle quote attorno ad r. Si dica inoltre, motivando la risposta, di che superficie si tratta.

  Risposta $x^2 + y^2 - 2x = 0$;
  si tratta di una quadrica semplicemente degenere con punto doppio in Z_∞: cilindro con $V = Z_\infty$. **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 31.08.2009

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Date le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 0 & k+1 & 0 \\ k+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ e $B_k = \begin{pmatrix} k-1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, si determinino:

- la dimensione dello spazio $\mathcal{L}(\mathcal{R})$ delle righe di A_k;

  Risposta $k \neq 0, -1$: dim$\mathcal{L}(\mathcal{R})$=3, $k = 0$: dim$\mathcal{L}(\mathcal{R})$=2, $k = -1$: dim$\mathcal{L}(\mathcal{R})$=1 **(pt.2)**
- la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema $A_kX = 0$;

  Risposta $k \neq 0, -1$: dim$S$=0, $k = 0$: dim$S$=1, $k = -1$: dim$S$=2 **(pt.2)**
- il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(\mathcal{R})$, posto $k = -1$, rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^3$;

  Risposta $\{(a, b, 0) \in \mathbb{R}^3, a, b \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali $A_kX = B_k$ risulta compatibile;

  Risposta $k \neq 0, -1$ **(pt.2)**
- gli autovalori di A_k con le relative molteplicità algebrica e geometrica e i valori reali di k per i quali A_k risulta diagonalizzabile.

  Risposta $k, -k-1, k+1$; $k \neq -1/2, -1$: $m_a(\lambda) = m_g(\lambda) = 1$; $k = -1/2$: $m_a(-1/2) = m_g(-1/2) = 2$, $m_a(1/2) = m_g(1/2) = 1$; $k = -1$: $m_a(-1) = m_g(-1) = 1$, $m_a(0) = m_g(0) = 2$.
  Diagonalizzabile per ogni valore di k **(pt.3)**

Posto $k = 1$ si determinino:

- le soluzioni di $A_1X = B_1$;

  Risposta $(0, 0, 1)$ **(pt.2)**
- una base di autovettori di A_1.

  Risposta $((0, 0, 1), (1, -1, 0), (1, 1, 0))$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica generale $\mathcal{C} : 3x^2 + y^2 - 4xy + 4x - 3 = 0$.
Nel caso $\mathcal{C}$ sia una parabola, se ne determinino centro improprio, asse, vertice e tangente nel vertice.
Nel caso $\mathcal{C}$ sia una conica a centro, se ne determinino punti impropri, assi e centro.

Risposta Iperbole; punti impropri: $[(1, 1, 0)], [(1, 3, 0)]$, assi: $(1 \pm \sqrt{5})x - 2y + 6 \mp 2\sqrt{5} = 0$, centro: $(2, 4)$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono dati la retta $r_k : \begin{cases} x + (k+1)y + (k+1)z = k \\ (k+1)x + y + (k+1)z = 1 \end{cases}$ ed il punto $P = (1, 0, 1)$. Si dica per quali valori reali di k la retta data esiste e per quali è propria.

Risposta la retta esiste per ogni valore di k ed è propria per $k \neq 0$ **(pt.2)**

Posto $k = -1$ si determinino rappresentazioni cartesiane

- del piano per P contenente r;

  Risposta $x + 2y - 1 = 0$ **(pt.2)**
- della retta per P incidente r e ad essa ortogonale;

  Risposta $\begin{cases} x + 2y - 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$ **(pt.3)**
- della superficie generata dalla rotazione dell'asse delle quote attorno ad r. Si dica inoltre, motivando la risposta, di che superficie si tratta.

  Risposta $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$;
  si tratta di una quadrica semplicemente degenere con punto doppio in Z_∞: cilindro con $V = Z_\infty$. **(pt.4)**

3

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 31.08.2009

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Date le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 0 & k-1 & 0 \\ k-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ e $B_k = \begin{pmatrix} k+1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, si determinino:

- la dimensione dello spazio $\mathcal{L}(\mathcal{R})$ delle righe di A_k;

  Risposta $k \neq 0, 1$: $\dim\mathcal{L}(\mathcal{R})=3$, $k = 0$: $\dim\mathcal{L}(\mathcal{R})=2$, $k = 1$: $\dim\mathcal{L}(\mathcal{R})=1$ ______ **(pt.2)**
- la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema $A_kX = 0$;

  Risposta $k \neq 0, 1$: $\dim S=0$, $k = 0$: $\dim S=1$, $k = 1$: $\dim S=2$ ______ **(pt.2)**
- il complemento ortogonale di $\mathcal{L}(\mathcal{R})$, posto $k = 1$, rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^3$;

  Risposta $\{(a, b, 0) \in \mathbb{R}^3, a, b \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**
- i valori di k per i quali $A_kX = B_k$ risulta compatibile;

  Risposta $k \neq 1$ ______ **(pt.2)**
- gli autovalori di A_k con le relative molteplicità algebrica e geometrica e i valori reali di k per i quali A_k risulta diagonalizzabile.

  Risposta $k, k-1, 1-k$; $k \neq 1/2, 1$: $m_a(\lambda) = m_g(\lambda) = 1$; $k = 1/2$: $m_a(1/2) = m_g(1/2) = 2$, $m_a(-1/2) = m_g(-1/2) = 1$; $k = 1$: $m_a(1) = m_g(1) = 1$, $m_a(0) = m_g(0) = 2$.
  Diagonalizzabile per ogni valore di k. ______ **(pt.3)**

Posto $k = 0$ si determinino:

- le soluzioni di $A_0X = B_0$;

  Risposta $\{(-2, -1, t) : t \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**
- una base di autovettori di A_0.

  Risposta $((0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, -1, 0))$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica generale $\mathcal{C} : x^2 + 2y^2 - 2xy + 2y = 0$.
Nel caso $\mathcal{C}$ sia una parabola, se ne determinino centro improprio, asse, vertice e tangente nel vertice.
Nel caso $\mathcal{C}$ sia una conica a centro, se ne determinino punti impropri, assi e centro.

Risposta Ellisse; punti impropri: $[(1 \pm i, 1, 0)]$; assi: $(\pm\sqrt{5} - 1)x - 2y \pm \sqrt{5} - 3 = 0$; centro: $(-1, -1)$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono dati la retta $r_k : \begin{cases} x + (k-1)y + (k-1)z = 2 \\ (k-1)x + y + (k-1)z = 0 \end{cases}$ ed il punto $P = (0, 0, 1)$. Si dica per quali valori reali di k la retta data esiste e per quali è propria.

Risposta la retta esiste per ogni valore di k ed è propria per $k \neq 2$ ______ **(pt.2)**

Posto $k = 1$ si determinino rappresentazioni cartesiane

- del piano per P contenente r;

  Risposta $y = 0$ ______ **(pt.2)**
- della retta per P incidente r e ad essa ortogonale;

  Risposta $\begin{cases} y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$ ______ **(pt.3)**
- della superficie generata dalla rotazione dell'asse delle quote attorno ad r. Si dica inoltre, motivando la risposta, di che superficie si tratta.

  Risposta $x^2 + y^2 - 4x = 0$:
  si tratta di una quadrica semplicemente degenere con punto doppio in Z_∞: cilindro con $V = Z_\infty$. ______ **(pt.4)**