

## UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - 4° appello 10.07.07

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

●Esercizio 1. Si consideri la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ . Si determinino:

(a) gli autovalori di  $A$  con le relative molteplicità algebriche;

risposta  $t_1 = 7$  con  $m.a. = 3$ ,  $t_2 = 0$  con  $m.a. = 1$  \_\_\_\_\_ (punti 2)

(b) l'autospazio  $S$  relativo all'autovalore positivo e la relativa dimensione;

risposta  $S = \{(a, b, 3a, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$   $\dim S = 3$  \_\_\_\_\_ (punti 3)

(c) una base ortonormale di  $S$

risposta  $B = ((0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (1/\sqrt{10}, 0, 3/\sqrt{10}, 0))$  \_\_\_\_\_ (punti 3)

●Esercizio 2. In  $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$  con il prodotto scalare euclideo si consideri il sottospazio vettoriale

$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0, x + y = 0, x + z = 0\}$ . Si determinino:

(a) una base e la dimensione di  $V$ ;

risposta  $B = ((1, -1, -1, 1))$   $\dim V = 1$  \_\_\_\_\_ (punti 2)

(b) una base e la dimensione del complemento ortogonale di  $V$ .

risposta  $B = ((1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 1))$   $\dim V^\perp = 3$  \_\_\_\_\_ (punti 3)

(c) una base e la dimensione di un complemento diretto di  $V$  diverso dal complemento ortogonale.

risposta  $B = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0))$   $\dim = 3$  \_\_\_\_\_ (punti 2)

●Esercizio 3. In  $E_3(\mathbb{R})$  sono date le rette  $r: y + 2z - 2 = 2x - 3z - 1 = 0$ ,  $s: y - 1 = 5x + z - 6 = 0$ .

Si determinino:

(a) la loro mutua posizione;

risposta sghembe \_\_\_\_\_ (punti 2)

(b) una rappresentazione analitica del piano passante per  $P = (1, 0, 0)$  e contenente  $r$ ;

risposta  $4x + y - 4z - 4 = 0$  \_\_\_\_\_ (punti 2)

(c) una rappresentazione analitica della retta passante per  $P$  e ortogonale a  $r$  ed  $s$ .

risposta  $\begin{cases} x = 1 + 20t \\ y = 17t \\ z = 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$  \_\_\_\_\_ (punti 3)

●Esercizio 4. In  $E_3(\mathbb{R})$  si considerino i punti  $A = (1, 1, 2)$ ,  $B = (0, 4, 4)$  e  $O = (0, 0, 0)$ . Si determinino:

(a) una rappresentazione cartesiana della sfera  $\mathcal{S}$  passante per  $A$ ,  $B$ ,  $O$  e avente centro  $C$  sul piano  $\alpha: z = 1$ ;

risposta  $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 2z = 0$  \_\_\_\_\_ (punti 2)

(b) una rappresentazione cartesiana della circonferenza  $\mathcal{C}$  passante per  $A$ ,  $B$  e  $O$ ;

risposta  $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y - 2z = x + y - z = 0$  \_\_\_\_\_ (punti 3)

(c) una rappresentazione cartesiana della retta tangente alla circonferenza  $\mathcal{C}$  in  $O$ .

risposta  $x + y - z = 2x - 3y - z = 0$  \_\_\_\_\_ (punti 3)

## UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - 4° appello 10.07.07

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

●Esercizio 1. Si consideri la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Si determinino:

(a) gli autovalori di  $A$  con le relative molteplicità algebriche;

risposta  $t_1 = 3$  con  $m.a. = 3$  e  $t_2 = 0$  con  $m.a. = 1$  \_\_\_\_\_ (punti 2)

(b) l'autospazio  $S$  relativo all'autovalore positivo e la relativa dimensione;

risposta  $S = \{(a, b, c, -b) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$   $\dim S = 3$  \_\_\_\_\_ (punti 3)

(c) una base ortonormale di  $S$ .

risposta  $B = ((1, 0, 0, 0), (0, 1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}), (0, 0, 1, 0))$  \_\_\_\_\_ (punti 3)

●Esercizio 2. In  $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$  con il prodotto scalare euclideo si consideri il sottospazio vettoriale

$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid -x + y - z + t = 0, x + z = 0, -z + t = 0\}$ . Si determinino:

(a) una base e la dimensione di  $V$ ;

risposta  $B = ((1, 1, -1, -1))$   $\dim V = 1$  \_\_\_\_\_ (punti 2)

(b) una base e la dimensione del complemento ortogonale di  $V$ ;

risposta  $B = ((0, 0, -1, 1), (1, 0, 1, 0), (-1, 1, -1, 1))$   $\dim V^\perp = 3$  \_\_\_\_\_ (punti 3)

(c) una base e la dimensione di un complemento diretto di  $V$  diverso dal complemento ortogonale.

risposta  $B = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0))$   $\dim = 3$  \_\_\_\_\_ (punti 2)

●Esercizio 3. In  $E_3(\mathbb{R})$  sono date le rette  $r : 2x - y + 3 = 2x + z = 0$ ,  $s : x - z = x + 3y + 4 = 0$ .

Si determinino:

(a) la loro mutua posizione;

risposta sghembe \_\_\_\_\_ (punti 2)

(b) una rappresentazione analitica del piano passante per  $P = (0, 0, 1)$  e contenente  $r$ ;

risposta  $4x + y + 3z - 3 = 0$  \_\_\_\_\_ (punti 2)

(c) una rappresentazione analitica della retta passante per  $P$  e ortogonale a  $r$  ed  $s$ .

risposta  $\begin{cases} x = 4t \\ y = -9t \\ z = 1 - 7t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$  \_\_\_\_\_ (punti 3)

●Esercizio 4. In  $E_3(\mathbb{R})$  si considerino i punti  $A = (-1, -1, 0)$ ,  $B = (-2, 1, 1)$  e  $O = (0, 0, 0)$ . Si determinino:

(a) una rappresentazione cartesiana della sfera  $\mathcal{S}$  passante per  $A$ ,  $B$ ,  $O$  e avente centro  $C$  sul piano  $\alpha : y = 2$ ;

risposta  $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y + 10z = 0$  \_\_\_\_\_ (punti 2)

(b) una rappresentazione cartesiana della circonferenza  $\mathcal{C}$  passante per  $A$ ,  $B$  e  $O$ ;

risposta  $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y + 10z = x - y + 3z = 0$  \_\_\_\_\_ (punti 3)

(c) una rappresentazione cartesiana della retta tangente alla circonferenza  $\mathcal{C}$  in  $O$ .

risposta  $3x - 2y + 5z = x - y + 3z = 0$  \_\_\_\_\_ (punti 3)

## UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - 4° appello 10.07.07

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

●Esercizio 1. Si consideri la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ . Si determinino:

(a) gli autovalori di  $A$  con le relative molteplicità algebriche;

**risposta**  $t_1 = 5$  con  $m.a. = 3$  e  $t_2 = 0$  con  $m.a. = 1$  \_\_\_\_\_ (punti 2)

(b) l'autospazio  $S$  relativo all'autovalore positivo e la relativa dimensione;

**risposta**  $S = \{(a, b, c, 2a) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$   $\dim S = 3$  \_\_\_\_\_ (punti 3)

(c) una base ortonormale di  $S$ .

**risposta**  $B = ((1/\sqrt{5}, 0, 0, 2/\sqrt{5}), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0))$  \_\_\_\_\_ (punti 3)

●Esercizio 2. In  $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$  con il prodotto scalare euclideo si consideri il sottospazio vettoriale

$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z - t = 0, x + y = 0, -y + t = 0\}$ . Si determinino:

(a) una base e la dimensione di  $V$ ;

**risposta**  $B = ((1, -1, 1, -1))$   $\dim V = 1$  \_\_\_\_\_ (punti 2)

(b) una base e la dimensione del complemento ortogonale di  $V$ ;

**risposta**  $B = ((1, 1, 0, 0), (0, -1, 0, 1), (1, 1, -1, -1))$   $\dim V^\perp = 3$  \_\_\_\_\_ (punti 3)

(c) una base e la dimensione di un complemento diretto di  $V$  diverso dal complemento ortogonale.

**risposta**  $B = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0))$   $\dim = 3$  \_\_\_\_\_ (punti 2)

●Esercizio 3. In  $E_3(\mathbb{R})$  sono date le rette  $r: x - y - 2 = x + 2z + 1 = 0$ ,  $s: 3x - y - 1 = y + z + 2 = 0$ .

Si determinino:

(a) la loro mutua posizione;

**risposta** sghembe \_\_\_\_\_ (punti 2)

(b) una rappresentazione analitica del piano passante per  $P = (0, 1, 0)$  e contenente  $r$ ;

**risposta**  $4x - y + 6z + 1 = 0$  \_\_\_\_\_ (punti 2)

(c) una rappresentazione analitica della retta passante per  $P$  e ortogonale a  $r$  ed  $s$ .

**risposta**  $\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - 5t \\ z = -4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$  \_\_\_\_\_ (punti 3)

●Esercizio 4. In  $E_3(\mathbb{R})$  si considerino i punti  $A = (2, 0, 2)$ ,  $B = (2, -1, -1)$  e  $O = (0, 0, 0)$ . Si determinino:

(a) una rappresentazione cartesiana della sfera  $\mathcal{S}$  passante per  $A$ ,  $B$ ,  $O$  e avente centro  $C$  sul piano  $\alpha: z = 1$ ;

**risposta**  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z = 0$  \_\_\_\_\_ (punti 2)

(c) una rappresentazione cartesiana della circonferenza  $\mathcal{C}$  passante per  $A$ ,  $B$  e  $O$ ;

**risposta**  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z = x + 3y - z = 0$  \_\_\_\_\_ (punti 3)

(d) una rappresentazione cartesiana della retta tangente alla circonferenza  $\mathcal{C}$  in  $O$ .

**risposta**  $x - 2y + z = x + 3y - z = 0$  \_\_\_\_\_ (punti 3)