UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 24.06.2009

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri, al variare del parametro reale k, il sottospazio $V_k = \mathcal{L}(((1,k,0,1),(k+1,0,0,1)))$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si determini una base di V_k.

Risposta $k \neq 0 : ((1,k,0,1),(k+1,0,0,1));\quad k = 0 : ((1,0,0,1))$ **(pt.2)**

Posto $k = 0$ si determinino:

- un complemento diretto di V_0;
  Risposta $\{(a,b,c,0) \in \mathbb{R}^4 : a,b,c \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**
- una base ortonormale del complemento ortogonale di V_0.
  Risposta $((0,1,0,0),(0,0,1,0),(1/\sqrt{2},0,0,-1/\sqrt{2}))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;
  Risposta $0,1,k,\ k \neq 0,1 : m_a(\lambda) = m_g(\lambda) = 1,\ k = 0 : m_a(0) = 2, m_g(0) = 1, m_a(1) = m_g(1) = 1, k = 1 : m_a(0) = m_g(0) = 1, m_a(1) = 2, m_g(1) = 1$ **(pt.3)**
- i valori di k per i quali la matrice A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq 0,1$ **(pt.1)**
- Posto $k = 2$ si determini, se esiste, una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A_2.
  Risposta $((1,0,0),(0,1,0),(1,4,2))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono dati la retta $r : \begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$ ed il punto $P = (0,1,0)$. Si determinino la proiezione ortogonale di P su r e la distanza di P da r.

Risposta $(1/3,-2/3,0),\quad \sqrt{26}/3$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$ si determini per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ la conica $\mathcal{C}_k : 3kx^2 + (k+1)y^2 - 5x + k = 0$ ha centro in $C = (5/6, 0)$. Si riconosca la conica trovata e se ne determinino, se esistono e sono reali, asintoti e assi.

Risposta $k = 1$, ellisse, non ha asintoti reali, assi: $x = 5/6, y = 0$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ è data la sfera $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8 = 0$.
Si determinino

- una rappresentazione cartesiana della circonferenza γ_1 di Σ che ha centro nel centro di Σ e che passa per $Q = (0,1,\sqrt{7})$ e per $R = (0,0,2\sqrt{2})$.
  Risposta $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8 = 0 \\ 2\sqrt{2}x + y(2\sqrt{2} - \sqrt{7}) + z - 2\sqrt{2} = 0 \end{cases}$ **(pt.3)**
- una rappresentazione cartesiana della circonferenza massima γ_2 di Σ passante per Q e che giace su un piano ortogonale a $\pi : x = 1$.
  Risposta $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8 = 0 \\ y\sqrt{7} - z = 0 \end{cases}$ **(pt.4)**

2

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 24.06.2009

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri, al variare del parametro reale k, il sottospazio $V_k = \mathcal{L}(((k+2,0,2,1),(0,0,2,1)))$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si determini una base di V_k.

Risposta $k \neq -2 : ((k+2,0,2,1),(0,0,2,1))$; $\quad k=-2 : ((0,0,2,1))$ **(pt.2)**

Posto $k=-2$ si determinino:

- un complemento diretto di V_{-2};
  Risposta $\{(a,b,c,0) \in \mathbb{R}^4, a,b,c \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**
- una base ortonormale del complemento ortogonale di V_{-2}.
  Risposta $((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,-1/\sqrt{5},2/\sqrt{5}))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;
  Risposta $0,1,k+1$, $k \neq -1,0 : m_a(\lambda) = m_g(\lambda) = 1$, $k=-1 : m_a(0) = 2, m_g(0) = 1, m_a(1) = m_g(1) = 1, k = 0 : m_a(0) = m_g(0) = 1, m_a(1) = 2, m_g(1) = 1$ **(pt.3)**
- i valori di k per i quali la matrice A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq -1,0$ **(pt.1)**
- Posto $k=1$ si determini, se esiste, una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A_1.
  Risposta $((1,0,-1),(1,0,0),(1,1,1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono dati la retta $r : \begin{cases} x+z=0 \\ 2x+y=0 \end{cases}$ ed il punto $P=(0,0,1)$. Si determinino la proiezione ortogonale di P su r e la distanza di P da r.

Risposta $(-1/6,1/3,1/6)$, $\quad \sqrt{30}/6$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$ si determini per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ la conica $\mathcal{C}_k : (k+2)x^2+4y^2-(k+4)x-5y+k+2=0$ ha centro in $C=(1,5/8)$. Si riconosca la conica trovata e se ne determinino, se esistono e sono reali, asintoti e assi.

Risposta $k=0$, ellisse, non ha asintoti reali, assi: $x=1, y=5/8$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ è data la sfera $\Sigma : x^2+y^2+z^2-2y-10=0$.
Si determinino

- una rappresentazione cartesiana della circonferenza γ_1 di Σ che ha centro nel centro di Σ e che passa per $Q=(1,0,3)$ e per $R=(0,0,\sqrt{10})$.
  Risposta $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2y-10=0 \\ x(3-\sqrt{10})-y\sqrt{10}-z+\sqrt{10}=0 \end{cases}$ **(pt.3)**
- una rappresentazione cartesiana della circonferenza massima γ_2 di Σ passante per Q e che giace su un piano ortogonale a $\pi : y=1$.
  Risposta $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2y-10=0 \\ 3x-z=0 \end{cases}$ **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 24.06.2009

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri, al variare del parametro reale k, il sottospazio $V_k = \langle\langle(1,0,2,0),(1,k-1,2,0)\rangle\rangle$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si determini una base di V_k.

Risposta $k \neq 1 : ((1,0,2,0),(1,k-1,2,0))$; $\quad k=1 : ((1,0,2,0))$ **(pt.2)**

Posto $k=1$ si determinino:

- un complemento diretto di V_1;
  Risposta $\{(a,b,0,c) \in \mathbb{R}^4, a,b,c \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**
- una base ortonormale del complemento ortogonale di V_1.
  Risposta $((0,1,0,0),(0,0,0,1),(-2/\sqrt{5},0,1/\sqrt{5},0))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;
  Risposta $1,2,k$, $k \neq 1,2 : m_a(\lambda) = m_g(\lambda) = 1$, $k=1 : m_a(1) = 2, m_g(1) = 1, m_a(2) = m_g(2) = 1$, $k = 2 : m_a(1) = m_g(1) = 1, m_a(2) = 2, m_g(2) = 1$ **(pt.3)**
- i valori di k per i quali la matrice A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq 1,2$ **(pt.1)**
- Posto $k=0$ si determini, se esiste, una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A_0.
  Risposta $((0,0,1),(1,2,1),(1,0,-1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono dati la retta $r : \begin{cases} y = 2 \\ 2x - z = -1 \end{cases}$ ed il punto $P = (1,0,0)$. Si determinino la proiezione ortogonale di P su r e la distanza di P da r.

Risposta $(-1/5, 2, 3/5)$, $\quad \sqrt{145}/5$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$ si determini per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ la conica $\mathcal{C}_k : 2kx^2 + y^2 - 6x + y - k + 4 = 0$ ha centro in $C = (1/2, -1/2)$. Si riconosca la conica trovata e se ne determinino, se esistono e sono reali, asintoti e assi.

Risposta $k=3$, ellisse, non ha asintoti reali, assi: $x = 1/2, y = -1/2$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ è data la sfera $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 17 = 0$.
Si determinino

- una rappresentazione cartesiana della circonferenza γ_1 di Σ che ha centro nel centro di Σ e che passa per $Q = (1,4,0)$ e per $R = (0,0,\sqrt{17})$.
  Risposta $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 17 = 0 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$ **(pt.3)**
- una rappresentazione cartesiana della circonferenza massima γ_2 di Σ passante per Q e che giace su un piano ortogonale a $\pi : z = 1$.
  Risposta $\gamma_2 = \gamma_1$ **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 24.06.2009

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri, al variare del parametro reale k, il sottospazio $V_k = \mathcal{L}(((-k,1,3,0),(0,1,k+3,0)))$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si determini una base di V_k.

Risposta $k \neq 0 : ((-k,1,3,0),(0,1,k+3,0))$; $\quad k = 0 : ((0,1,3,0))$ **(pt.2)**

Posto $k = 0$ si determinino:

- un complemento diretto di V_0;
  Risposta $\{(a,b,0,c) \in \mathbb{R}^4, a,b,c \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**
- una base ortonormale del complemento ortogonale di V_0.
  Risposta $((1,0,0,0),(0,0,0,1),(0,-3/\sqrt{10},1/\sqrt{10},0))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & k+2 & 0 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;
  Risposta $0,1,k+2,\ k \neq -2,-1 : m_a(\lambda) = m_g(\lambda) = 1,\ k = -2 : m_a(0) = 2, m_g(0) = 1, m_a(1) = m_g(1) = 1, k = -1 : m_a(0) = m_g(0) = 1, m_a(1) = m_g(1) = 2$ **(pt.3)**
- i valori di k per i quali la matrice A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq -2$ **(pt.1)**
- Posto $k = -1$ si determini, se esiste, una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A_{-1}.
  Risposta $((1,0,-1),(1,1,0),(0,0,1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono dati la retta $r : \begin{cases} y+z=1 \\ x+2=0 \end{cases}$ ed il punto $P = (0,1,0)$. Si determinino la proiezione ortogonale di P su r e la distanza di P da r.

Risposta $(-2,1,0)$, $\quad 2$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$ si determini per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ la conica $\mathcal{C}_k : (k-3)x^2 + ky^2 - 16y + 9 = 0$ ha centro in $C = (0,2)$. Si riconosca la conica trovata e se ne determinino, se esistono e sono reali, asintoti e assi.

Risposta $k = 4$, ellisse, non ha asintoti reali, assi: $x = 0, y = 2$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ è data la sfera $\Sigma : x^2+y^2+z^2-2x-5=0$.
Si determinino

- una rappresentazione cartesiana della circonferenza γ_1 di Σ che ha centro nel centro di Σ e che passa per $Q = (0,1,2)$ e per $R = (0,0,\sqrt{5})$.
  Risposta $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-5=0 \\ \sqrt{5}x + y(\sqrt{5}-2) + z - \sqrt{5} = 0 \end{cases}$ **(pt.3)**
- una rappresentazione cartesiana della circonferenza massima γ_2 di Σ passante per Q e che giace su un piano ortogonale a $\pi : x = 1$.
  Risposta $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-5=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 24.06.2009

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri, al variare del parametro reale k, il sottospazio $V_k = \mathcal{L}(((1, k-2, 0, 0), (1, -1, 0, k-1)))$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si determini una base di V_k.

Risposta $k \neq 1 : ((1, k-2, 0, 0), (1, -1, 0, k-1));$ $\quad k = 1 : ((1, -1, 0, 0))$ **(pt.2)**

Posto $k = 1$ si determinino:

- un complemento diretto di V_1;

  Risposta $\{(a, 0, b, c) \in \mathbb{R}^4, a, b, c \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**
- una base ortonormale del complemento ortogonale di V_1.

  Risposta $((0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;

  Risposta $0, 1, k-1,\ k \neq 1, 2 : m_a(\lambda) = m_g(\lambda) = 1,\ k = 1 : m_a(0) = 2, m_g(0) = 1, m_a(1) = m_g(1) = 1, k = 2 : m_a(0) = m_g(0) = 1, m_a(1) = 2, m_g(1) = 1$ **(pt.3)**
- i valori di k per i quali la matrice A_k è diagonalizzabile;

  Risposta $k \neq 1, 2$ **(pt.1)**
- Posto $k = 0$ si determini, se esiste, una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A_0.

  Risposta $((1, 0, -1), (0, 0, 1), (-2, 2, 1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono dati la retta $r : \begin{cases} 3x + y = 1 \\ y = 4 \end{cases}$ ed il punto $P = (1, 0, 0)$. Si determinino la proiezione ortogonale di P su r e la distanza di P da r.

Risposta $(-1, 4, 0)$, $\quad 2\sqrt{5}$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$ si determini per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ la conica $\mathcal{C}_k : 2x^2 + (k+3)y^2 + (k-8)x + y = k$ ha centro in $C = (2, -1/6)$. Si riconosca la conica trovata e se ne determinino, se esistono e sono reali, asintoti e assi.

Risposta $k = 0$, ellisse, non ha asintoti reali, assi: $x = 2, y = -1/6$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ è data la sfera $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 26 = 0$.
Si determinino

- una rappresentazione cartesiana della circonferenza γ_1 di Σ che ha centro nel centro di Σ e che passa per $Q = (1, 0, 5)$ e per $R = (0, 0, \sqrt{26})$.

  Risposta $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 26 = 0 \\ x(5 - \sqrt{26}) - y\sqrt{26} - z + \sqrt{26} = 0 \end{cases}$ **(pt.3)**
- una rappresentazione cartesiana della circonferenza massima γ_2 di Σ passante per Q e che giace su un piano ortogonale a $\pi : y = 1$.

  Risposta $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 26 = 0 \\ 5x - z = 0 \end{cases}$ **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 24.06.2009

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri, al variare del parametro reale k, il sottospazio $V_k = \mathcal{L}(((0,0,1,k+1),(0,0,1,2)))$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si determini una base di V_k.

Risposta $k \neq 1 : ((0,0,1,k+1),(0,0,1,2)); k = 1 : ((0,0,1,2))$ **(pt.2)**

Posto $k = 1$ si determinino:

- un complemento diretto di V_1;
  Risposta $\{(a,b,c,0) \in \mathbb{R}^4, a,b,c \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**
- una base ortonormale del complemento ortogonale di V_1.
  Risposta $((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,-2/\sqrt{5},1/\sqrt{5}))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- gli autovalori di A_k e le rispettive molteplicità algebriche e geometriche;
  Risposta $0, k, k+1,\ k \neq 0, -1 : m_a(\lambda) = m_g(\lambda) = 1,\ k = 0 : m_a(0) = m_g(0) = 2, m_a(1) = m_g(1) = 1, k = -1 : m_a(0) = 2, m_g(0) = 1, m_a(-1) = m_g(-1) = 1$ **(pt.3)**
- i valori di k per i quali la matrice A_k è diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq -1$ **(pt.1)**
- Posto $k = 0$ si determini, se esiste, una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A_0.
  Risposta $((0,1,0),(0,0,1),(1,0,1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono dati la retta $r : \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z = 2 \end{cases}$ ed il punto $P = (0,0,0)$. Si determinino la proiezione ortogonale di P su r e la distanza di P da r.

Risposta $(2/3, 2/3, 2/3)$, $2\sqrt{3}/3$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$ si determini per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ la conica $\mathcal{C}_k : (5-k)x^2 + y^2 + kx - 3y - k = 0$ ha centro in $C = (1/7, 3/2)$. Si riconosca la conica trovata e se ne determinino, se esistono e sono reali, asintoti e assi.

Risposta $k = -2$, ellisse, non ha asintoti reali, assi: $x = 1/7, y = 3/2$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ è data la sfera $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 10 = 0$.
Si determinino

- una rappresentazione cartesiana della circonferenza γ_1 di Σ che ha centro nel centro di Σ e che passa per $Q = (1,3,0)$ e per $R = (0,0,\sqrt{10})$.
  Risposta $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2z - 10 = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$ **(pt.3)**
- una rappresentazione cartesiana della circonferenza massima γ_2 di Σ passante per Q e che giace su un piano ortogonale a $\pi : z = 1$.
  Risposta $\gamma_2 = \gamma_1$ **(pt.4)**