UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 3^o appello 4.04.07

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

•Esercizio 1. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Si determinino gli autovalori di A e, per ogni autovalore trovato, la molteplicità algebrica e l'autospazio con la relativa dimensione.

risposta $\lambda_1 = 1 \quad m.a. = 2 \quad V_{(1)} = \{(t,p,t) \in \mathbb{R}^3 \mid t,p \in \mathbb{R}\} \quad dimV_{(1)} = 2$
$\lambda_2 = 2 \quad m.a. = 1 \quad V_{(2)} = \{(0,h,-h) \in \mathbb{R}^3 \mid h \in \mathbb{R}\} \quad dimV_{(2)} = 1$ ______ **(punti 5)**

•Esercizio 2. Si dica quante sono le soluzioni del sistema $\begin{cases} kx + z + t = 0 \\ ky + z + (k+1)t = 0 \\ kx = 0 \end{cases}$ al variare di k nei reali.

risposta Per $k \neq 0$ ∞^1 soluzioni; per $k = 0$ ∞^3 soluzioni. ______ **(punti 3)**

Posto $k = 0$ si determinino:
(a) l'insieme S delle soluzioni del sistema;

risposta $S = \{(h,k,p,-p) \in \mathbb{R}^4 \mid h,k,p \in \mathbb{R}\}$ ______ **(punti 2)**

(a) una base ortonormale di S rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.

risposta $B = ((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}))$ ______ **(punti 2)**

•Esercizio 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $a : x+y+z-2 = z-1 = 0$, $b : x+y-1 = y+z-1 = 0$ e $c : x-1 = z-2 = 0$.
Si determinino:
(a) le mutue posizioni delle rette, prese a due a due;

risposta a, b incidenti, a, c sghembe, b, c sghembe. ______ **(punti 3)**

(b) una rappresentazione analitica del piano, se esiste, che contiene a e b;

risposta $x + y = 1$ ______ **(punti 3)**

(c) una rappresentazione analitica della retta, se esiste, incidente a e c e parallela a b.

risposta $x + y - 1 = x - z + 1 = 0$ ______ **(punti 3)**

•Esercizio 4. In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino i punti $A = (1,1,0)$, $B = (2,1,0)$ e la retta $t : 2x - y = y + z = 0$. Si determinino:
(a) una rappresentazione cartesiana della sfera $\mathcal{S}$ passante per A, B e avente centro C su t;

risposta $(x - 3/2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 3)^2 = 53/4$ ______ **(punti 3)**

(b) una rappresentazione cartesiana del piano π passante per A e B e ortogonale al piano xy;

risposta $y = 1$ ______ **(punti 2)**

(c) una rappresentazione cartesiana, centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C} = S \bigcap \pi$.

risposta $\mathcal{C} = \begin{cases} (x - 3/2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 3)^2 = 53/4 \\ y = 1 \end{cases}$ $\quad C' = (3/2, 1, -3), \quad r = \sqrt{37}/2$ ______ **(punti 4)**

2

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 3^o appello 4.04.07

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

•Esercizio 1. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Si determinino gli autovalori di A e, per ogni autovalore trovato, la molteplicità algebrica e l'autospazio con la relativa dimensione.

risposta $\lambda_1 = 2 \quad m.a. = 2 \quad V_{(2)} = \{(t,0,0) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\} \quad dim V_{(2)} = 1$
$\lambda_2 = 3 \quad m.a. = 1 \quad V_{(3)} = \{(4p,-p,p) \in \mathbb{R}^3 \mid p \in \mathbb{R}\} \quad dim V_{(3)} = 1$ ______ **(punti 5)**

•Esercizio 2. Si dica quante sono le soluzioni del sistema $\begin{cases} x+z+(k-1)t = 0 \\ x+(k-1)y+kz = 0 \\ (k-1)t = 0 \end{cases}$ al variare di k nei reali.

risposta Per $k \neq 1$ ∞^1 soluzioni; per $k = 1$ ∞^3 soluzioni. ______ **(punti 3)**

Posto $k = 1$ si determinino:
(a) l'insieme S delle soluzioni del sistema;

risposta $S = \{(h,k,-h,p) \in \mathbb{R}^4 \mid k,h,p \in \mathbb{R}\}$ ______ **(punti 2)**

(a) una base ortonormale di S rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.

risposta $B = ((1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}, 0), (0,1,0,0), (0,0,0,1))$ ______ **(punti 2)**

•Esercizio 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $a : x+y+z-3 = x-2 = 0$, $b : z-1 = y = 0$ e $c : y-z-2 = x-1 = 0$.
Si determinino:
(a) le mutue posizioni delle rette, prese a due a due;

risposta a,b incidenti, a,c sghembe, b,c sghembe. ______ **(punti 3)**

(b) una rappresentazione analitica del piano, se esiste, che contiene a e b;

risposta $y+z-1 = 0$ ______ **(punti 3)**

(c) una rappresentazione analitica della retta, se esiste, incidente a e c e parallela a b.

risposta $2z+1 = 2y-3 = 0$ ______ **(punti 3)**

•Esercizio 4. In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino i punti $A = (0,1,1)$, $B = (0,2,1)$ e la retta $t : 2y-z = x+z = 0$. Si determinino:
(a) una rappresentazione cartesiana della sfera $\mathcal{S}$ passante per A, B e avente centro C su t;

risposta $(x+3)^2 + (y-3/2)^2 + (z-3)^2 = 53/4$ ______ **(punti 3)**

(b) una rappresentazione cartesiana del piano π passante per A e B e ortogonale al piano yz;

risposta $z = 1$ ______ **(punti 2)**

(c) una rappresentazione cartesiana, centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C} = S \bigcap \pi$.

risposta $\mathcal{C} = \begin{cases} (x+3)^2 + (y-3/2)^2 + (z-3)^2 = 53/4 \\ z = 1 \end{cases}$ $C' = (-3, 3/2, 1)$, $r = \sqrt{37}/2$ ______ **(punti 4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 3^o appello 4.04.07

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

•**Esercizio 1.** Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Si determinino gli autovalori di A e, per ogni autovalore trovato, la molteplicità algebrica e l'autospazio con la relativa dimensione.

risposta $\lambda_1 = -1 \quad m.a. = 2 \quad V_{(-1)} = \{(t, -t, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\} \quad dim V_{(-1)} = 1$
$\lambda_2 = 2 \quad m.a. = 1 \quad V_{(2)} = \{(0, h, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid h \in \mathbb{R}\} \quad dim V_{(2)} = 1$ ____________**(punti 5)**

•**Esercizio 2.** Si dica quante sono le soluzioni del sistema $\begin{cases} x + y + kz = 0 \\ kz = 0 \\ 2x + (k+2)y + kz + kt = 0 \end{cases}$ al variare di k nei reali.

risposta Per $k \neq 0$ ∞^1 soluzioni; per $k = 0$ ∞^3 soluzioni. ____________**(punti 3)**

Posto $k = 0$ si determinino:
(a) l'insieme S delle soluzioni del sistema;

risposta $S = \{(h, -h, k, p) \in \mathbb{R}^4 \mid h, k, p \in \mathbb{R}\}$ ____________**(punti 2)**

(a) una base ortonormale di S rispetto al prodotto scalare euclideo di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.

risposta $B = ((1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ ____________**(punti 2)**

•**Esercizio 3.** In $E_3(\mathbb{R})$ sono date le rette $a : x + y - z - 1 = y - 1 = 0$, $b : x = y + 2z - 1 = 0$ e $c : z - 1 = y - 2 = 0$. Si determinino:
(a) le mutue posizioni delle rette, prese a due a due;

risposta a, b incidenti, a, c sghembe, b, c sghembe. ____________**(punti 3)**

(b) una rappresentazione analitica del piano, se esiste, che contiene a e b;

risposta $2x - y - 2z + 1 = 0$ ____________**(punti 3)**

(c) una rappresentazione analitica della retta, se esiste, incidente a e c e parallela a b.

risposta $2y - 3 = 2z + 1 = 0$ ____________**(punti 3)**

•**Esercizio 4.** In $E_3(\mathbb{R})$ si considerino i punti $A = (0, 3, 1)$, $B = (0, 2, 1)$ e la retta $t : x - y + 2 = x - z + 1 = 0$. Si determinino:
(a) una rappresentazione cartesiana della sfera $\mathcal{S}$ passante per A, B e avente centro C su t;

risposta $(x - 1/2)^2 + (y - 5/2)^2 + (z - 3/2)^2 = 3/4$ ____________**(punti 3)**

(b) una rappresentazione cartesiana del piano π passante per A e B e ortogonale al piano yz;

risposta $z = 1$ ____________**(punti 2)**

(c) una rappresentazione cartesiana, centro e raggio della circonferenza $\mathcal{C} = S \bigcap \pi$.

risposta $\mathcal{C} = \begin{cases} (x - 1/2)^2 + (y - 5/2)^2 + (z - 3/2)^2 = 3/4 \\ z = 1 \end{cases}$ $C' = (1/2, 5/2, 1)$, $r = 1/\sqrt{2}$ ____________**(punti 4)**