UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria/ Algebra ed Elementi di Geometria - III appello - 3.04.12

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si determinino i valori di k per i quali la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & k & 0 & 0 \\ 0 & k-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & k-1 \end{pmatrix}$ risulta diagonalizzabile e quelli per i quali lo è ortogonalmente.

Risposta A_k è diagonalizzabile per ogni valore di k; per $k=0$ A_0 è ortogonalmente diagonalizzabile **(pt.5)**

Posto $k=0$, si determinino una matrice diagonale simile ad A_0, la relativa diagonalizzante e, se possibile, una diagonalizzante ortogonale.

Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.5)**

Dette R_1, R_2, R_3, R_4 le righe di A_k, siano U e W i sottospazi di R^4 generati rispettivamente da $[R_1, R_2]$ e $[R_3, R_4]$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino le dimensioni di U e W e si dica se esistono valori di k per i quali la somma $U+W$ è diretta.
Risposta $k \neq 0,2 : dim\ U = dim\ W = 2$; $k = 0,2 : dim\ U = dim\ W = 1$; $U+W$ è diretta per ogni $k \in \mathbb{R}$. **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. Si dica per quali valori di $k \in \mathbb{C}$ i sistemi $r_k : \begin{cases} kx+ky=0 \\ (k-2)y=0 \end{cases}$ e $s_k : \begin{cases} (k-1)z-1=0 \\ z=k-1 \end{cases}$ rappresentano rette di $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$.

Risposta $k \neq 0,2$ **(pt.2)**

In tal caso, si determinino i valori di k, se esistono, per i quali:

- le rette sono proprie o improprie;

  Risposta per $k \neq 0,2$ risulta $r_k : x=y=0$ dunque r_k è propria;
  per $k \neq 0,2$ risulta $s_k : z-1 = z-(k-1) = 0$ dunque s_k è la retta impropria del piano $z=0$. **(pt.1)**

- esiste un piano che le contiene entrambe.

  Risposta non esiste (non esiste piano parallelo al piano $z=0$ contenente l'asse delle quote). **(pt.2)**

Posto $k=3$, si determini una rappresentazione cartesiana della superficie Σ generata dalla retta $t : \begin{cases} x=0 \\ y-z=-1 \end{cases}$ nella rotazione di asse r_3. Si riconosca Σ e si determini una rappresentazione cartesiana della sua conica impropria.
Risposta $x^2+y^2-z^2+2z-1=0$ Si tratta di un cono dotato di falda reale con vertice $V=(0,0,1)$;
$\mathcal{C}_\infty : \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_1^2+x_2^2-x_3^2=0 \end{cases}$ conica irriducibile dotata di punti reali. **(pt.5)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k : x^2+ky^2-2xy-ky=0$, dove $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ è generale;
  Risposta $k \neq 0$ **(pt.1)**

- $\mathcal{C}_k$ è una parabola, un'ellisse o un'iperbole.
  Risposta iperbole per $k<1$ e $k \neq 0$, parabola per $k=1$, ellisse per $1<k$ **(pt.2)**

Posto $k=-1$ si riconosca $\mathcal{C}_{-1}$ e si determinino, se esistono e sono reali, centro, assi e asintoti di $\mathcal{C}_{-1}$.

Risposta Iperbole; $C=(1/4,1/4)$, asintoti: $4x-4(1\pm\sqrt{2})y = \mp\sqrt{2}$, assi: $4(-1\pm\sqrt{2})x+4y=\pm\sqrt{2}$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria/ Algebra ed Elementi di Geometria - III appello - 3.04.12

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si determinino i valori di k per i quali la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ k-1 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix}$ risulta diagonalizzabile e quelli per i quali lo è ortogonalmente.

Risposta A_k è diagonalizzabile per ogni valore di k; per $k = 1$ A_1 è ortogonalmente diagonalizzabile **(pt.5)**

Posto $k = 1$, si determinino una matrice diagonale simile ad A_1, la relativa diagonalizzante e, se possibile, una diagonalizzante ortogonale.

Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.5)**

Dette R_1, R_2, R_3, R_4 le righe di A_k, siano U e W i sottospazi di R^4 generati rispettivamente da $[R_1, R_2]$ e $[R_3, R_4]$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino le dimensioni di U e W e si dica se esistono valori di k per i quali la somma $U + W$ è diretta.

Risposta $k \neq 0 : dim\ U = 2$, $k = 0 : dim\ U = 1$; $k \neq 1 : dim\ W = 2$, $k = 1 : dim\ W = 1$;
$U + W$ è diretta per $k \neq \pm 1$. **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. Si dica per quali valori di $k \in \mathbb{C}$ i sistemi $r_k : \begin{cases} ky - z = 0 \\ (k-1)z = 0 \end{cases}$ e $s_k : \begin{cases} kx = 0 \\ (k-1)x = k-1 \end{cases}$ rappresentano rette di $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$.

Risposta $k \neq 0, 1$ **(pt.2)**

In tal caso, si determinino i valori di k, se esistono, per i quali:

- le rette sono proprie o improprie;

  Risposta per $k \neq 0, 1$ risulta $r_k : y = z = 0$ dunque r_k è propria;
  per $k \neq 0, 1$ risulta $s_k : x = x - 1 = 0$ dunque s_k è la retta impropria del piano $x = 0$. **(pt.1)**

- esiste un piano che le contiene entrambe.

  Risposta non esiste (non esiste piano parallelo al piano $x = 0$ contenente l'asse delle ascisse). **(pt.2)**

Posto $k = 2$, si determini una rappresentazione cartesiana della superficie Σ generata dalla retta $t : \begin{cases} y = 0 \\ x - z = -1 \end{cases}$ nella rotazione di asse r_2. Si riconosca Σ e si determini una rappresentazione cartesiana della sua conica impropria.

Risposta $x^2 - y^2 - z^2 + 2x + 1 = 0$ Si tratta di un cono dotato di falda reale con vertice $V = (-1, 0, 0)$;
$\mathcal{C}_\infty : \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \end{cases}$ conica irriducibile dotata di punti reali. **(pt.5)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k : kx^2 - y^2 - 2xy - kx = 0$, dove $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ è generale;
  Risposta $k \neq 0$ **(pt.1)**

- $\mathcal{C}_k$ è una parabola, un'ellisse o un'iperbole.
  Risposta ellisse per $k < -1$, parabola per $k = -1$, iperbole per $-1 < k$ e $k \neq 0$ **(pt.2)**

Posto $k = 1$ si riconosca $\mathcal{C}_1$ e si determinino, se esistono e sono reali, centro, assi e asintoti di $\mathcal{C}_1$.

Risposta Iperbole; $C = (1/4, -1/4)$, asintoti: $4x - 4(1 \pm \sqrt{2})y = 2 \pm \sqrt{2}$,
assi: $4(-1 \pm \sqrt{2})x + 4y = -2 \pm \sqrt{2}$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria/ Algebra ed Elementi di Geometria - III appello - 3.04.12

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si determinino i valori di k per i quali la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k+2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 & 2k \\ 0 & 0 & 0 & k+3 \end{pmatrix}$ risulta diagonalizzabile e quelli per i quali lo è ortogonalmente.

Risposta A_k è diagonalizzabile per ogni valore di k; per $k=0$ A_0 è ortogonalmente diagonalizzabile **(pt.5)**

Posto $k=0$, si determinino una matrice diagonale simile ad A_0, la relativa diagonalizzante e, se possibile, una diagonalizzante ortogonale.

Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.5)**

Dette R_1, R_2, R_3, R_4 le righe di A_k, siano U e W i sottospazi di R^4 generati rispettivamente da $[R_1, R_2]$ e $[R_3, R_4]$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino le dimensioni di U e W e si dica se esistono valori di k per i quali la somma $U + W$ è diretta.
Risposta $k \neq -1, -3 : dim\ U = dim\ W = 2$, $k = -1, -3 : dim\ U = dim\ W = 1$; $U + W$ è diretta per ogni k. **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. Si dica per quali valori di $k \in \mathbb{C}$ i sistemi $r_k : \begin{cases} (k+1)x - z = 0 \\ (k+2)z = 0 \end{cases}$ e $s_k : \begin{cases} (k+1)y = 0 \\ (k+2)y = k+2 \end{cases}$ rappresentano rette di $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$.

Risposta $k \neq -1, -2$ **(pt.2)**

In tal caso, si determinino i valori di k, se esistono, per i quali:

- le rette sono proprie o improprie;

  Risposta per $k \neq -1, -2$ risulta $r_k : x = z = 0$ dunque r_k è propria;
  per $k \neq -1, -2$ risulta $s_k : y = y - 1 = 0$ dunque s_k è la retta impropria del piano $y = 0$. **(pt.1)**

- esiste un piano che le contiene entrambe.

  Risposta non esiste (non esiste piano parallelo al piano $y = 0$ contenente l'asse delle ordinate). **(pt.2)**

Posto $k = 0$, si determini una rappresentazione cartesiana della superficie Σ generata dalla retta $t : \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ nella rotazione di asse r_0. Si riconosca Σ e si determini una rappresentazione cartesiana della sua conica impropria.
Risposta $x^2 - y^2 + z^2 + 2y - 1 = 0$ Si tratta di un cono dotato di falda reale con vertice $V = (0, 1, 0)$;
$\mathcal{C}_\infty : \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 = 0 \end{cases}$ conica irriducibile dotata di punti reali. **(pt.5)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k : x^2 + (k+1)y^2 + 2xy + (k-1)y = 0$, dove $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ è generale;
  Risposta $k \neq 1$ **(pt.1)**

- $\mathcal{C}_k$ è una parabola, un'ellisse o un'iperbole.
  Risposta iperbole per $k < 0$, parabola per $k = 0$, ellisse per $k > 0$ e $k \neq 1$ **(pt.2)**

Posto $k = -1$ si riconosca $\mathcal{C}_{-1}$ e si determinino, se esistono e sono reali, centro, assi e asintoti di $\mathcal{C}_{-1}$.

Risposta Iperbole; $C = (1, -1)$, asintoti: $x = 1$, $x + 2y + 1 = 0$, assi: $2x + (-1 \pm \sqrt{5})y - 3 \pm \sqrt{5} = 0$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria/ Algebra ed Elementi di Geometria - III appello - 3.04.12

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si determinino i valori di k per i quali la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & k+3 & 0 & k-1 \\ 2 & 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix}$ risulta diagonalizzabile e quelli per i quali lo è ortogonalmente.

Risposta A_k è diagonalizzabile per ogni valore di k; per $k = 1$ A_1 è ortogonalmente diagonalizzabile **(pt.5)**

Posto $k = 1$, si determinino una matrice diagonale simile ad A_1, la relativa diagonalizzante e, se possibile, una diagonalizzante ortogonale.

Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.5)**

Dette R_1, R_2, R_3, R_4 le righe di A_k, siano U e W i sottospazi di R^4 generati rispettivamente da $[R_1, R_2]$ e $[R_3, R_4]$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino le dimensioni di U e W e si dica se esistono valori di k per i quali la somma $U + W$ è diretta.
Risposta $dim\ U = 2$ per ogni k, $k = 1 : dim\ W = 1$, $k \neq 1 : dim\ W = 2$; $U + W$ è diretta per $k \neq 1, -3$. **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. Si dica per quali valori di $k \in \mathbb{C}$ i sistemi $r_k : \begin{cases} kx + 2y = 0 \\ (k-4)y = 0 \end{cases}$ e $s_k : \begin{cases} kz = 0 \\ (k-4)z = k-4 \end{cases}$ rappresentano rette di $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$.

Risposta $k \neq 0, 4$ **(pt.2)**

In tal caso, si determinino i valori di k, se esistono, per i quali:

- le rette sono proprie o improprie;

  Risposta per $k \neq 0, 4$ risulta $r_k : x = y = 0$ dunque r_k è propria;
  per $k \neq 0, 4$ risulta $s_k : z = z - 1 = 0$ dunque s_k è la retta impropria del piano $z = 0$. **(pt.1)**

- esiste un piano che le contiene entrambe.

  Risposta non esiste (non esiste piano parallelo al piano $z = 0$ contenente l'asse delle quote). **(pt.2)**

Posto $k = 5$, si determini una rappresentazione cartesiana della superficie Σ generata dalla retta $t : \begin{cases} x + z = -3 \\ y = 0 \end{cases}$ nella rotazione di asse r_5. Si riconosca Σ e si determini una rappresentazione cartesiana della sua conica impropria.
Risposta $x^2 + y^2 - z^2 - 6z - 9 = 0$ Si tratta di un cono dotato di falda reale con vertice $V = (0, 0, -3)$;
$\mathcal{C}_\infty : \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \end{cases}$ conica irriducibile dotata di punti reali. **(pt.5)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k : kx^2 + 3y^2 + 2xy + (k+1)x = 0$, dove $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ è generale;
  Risposta $k \neq -1$ **(pt.1)**

- $\mathcal{C}_k$ è una parabola, un'ellisse o un'iperbole.
  Risposta ellisse per $k > 1/3$, parabola per $k = 1/3$, iperbole per $k < 1/3$ e $k \neq -1$ **(pt.2)**

Posto $k = -3$ si riconosca $\mathcal{C}_{-3}$ e si determinino, se esistono e sono reali, centro, assi e asintoti di $\mathcal{C}_{-3}$.

Risposta Iperbole; $C = (-3/10, 1/10)$, asintoti: $30x - 10(1 \pm \sqrt{10})y + 10 \pm \sqrt{10} = 0$,
assi: $10x - 10(-3 \pm \sqrt{10})y \pm \sqrt{10} = 0$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria/ Algebra ed Elementi di Geometria - III appello - 3.04.12

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si determinino i valori di k per i quali la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 & k-1 \end{pmatrix}$ risulta diagonalizzabile e quelli per i quali lo è ortogonalmente.

Risposta A_k è diagonalizzabile per ogni valore di k; per $k=-1$ A_{-1} è ortogonalmente diagonalizzabile **(pt.5)**

Posto $k=-1$, si determinino una matrice diagonale simile ad A_{-1}, la relativa diagonalizzante e, se possibile, una diagonalizzante ortogonale.

Risposta $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.5)**

Dette R_1, R_2, R_3, R_4 le righe di A_k, siano U e W i sottospazi di R^4 generati rispettivamente da $[R_1, R_2]$ e $[R_3, R_4]$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino le dimensioni di U e W e si dica se esistono valori di k per i quali la somma $U+W$ è diretta.
Risposta $k \neq \pm 1$: $dim\ U = dim\ W = 2$, $k = \pm 1$: $dim\ U = dim\ W = 1$; $U+W$ è diretta per ogni $k \in \mathbb{R}$. **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. Si dica per quali valori di $k \in \mathbb{C}$ i sistemi $r_k : \begin{cases} (k+1)x + (k+1)y + 2k + 2 = 0 \\ (k-1)y + k - 1 = 0 \end{cases}$ e s_k : $\begin{cases} kz + 1 + k = 0 \\ z + 1 + k = 0 \end{cases}$ rappresentano rette di $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$.
Risposta $k \neq \pm 1$ **(pt.2)**

In tal caso, si determinino i valori di k, se esistono, per i quali:

- le rette sono proprie o improprie;

  Risposta per $k \neq \pm 1$ risulta $r_k : x+1 = y+1 = 0$ dunque r_k è propria;
  per $k \neq \pm 1$ risulta $s_k : kz + 1 + k = z + 1 + k = 0$ dunque s_k è la retta impropria del piano $z = 0$. **(pt.1)**

- esiste un piano che le contiene entrambe.

  Risposta non esiste (non esiste piano parallelo al piano $z = 0$ contenente una retta parallela all'asse delle quote). **(pt.2)**

Posto $k = 2$, si determini una rappresentazione cartesiana della superficie Σ generata dalla retta $t : \begin{cases} x+1 = 0 \\ y+z = -3 \end{cases}$ nella rotazione di asse r_2. Si riconosca Σ e si determini una rappresentazione cartesiana della sua conica impropria.
Risposta $x^2+y^2-z^2+2x+2y-4z-2 = 0$ Si tratta di un cono dotato di falda reale con vertice $V = (-1,-1,-2)$;
$\mathcal{C}_\infty : \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \end{cases}$ conica irriducibile dotata di punti reali. **(pt.5)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k : 2kx^2 + y^2 - 2xy - 2kx = 0$, dove $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ è generale;
  Risposta $k \neq 0$ **(pt.1)**

- $\mathcal{C}_k$ è una parabola, un'ellisse o un'iperbole.
  Risposta ellisse per $k > 1/2$, parabola per $k = 1/2$, iperbole per $k < 1/2$ e $k \neq 0$ **(pt.2)**

Posto $k = -1$ si riconosca $\mathcal{C}_{-1}$ e si determinino, se esistono e sono reali, centro, assi e asintoti di $\mathcal{C}_{-1}$.

Risposta Iperbole; $C = (1/3, 1/3)$, asintoti: $3(1 \pm \sqrt{3})x - 3y \mp \sqrt{3} = 0$, assi: $3(-3 \pm \sqrt{13})x - 6y + 5 \mp \sqrt{13} = 0$ **(pt.3)**

6

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria/ Algebra ed Elementi di Geometria - III appello - 3.04.12

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si determinino i valori di k per i quali la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k-1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k-1 & 0 & 0 \\ k-2 & 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$ risulta diagonalizzabile e quelli per i quali lo è ortogonalmente.

Risposta A_k è diagonalizzabile per ogni valore di k; per $k=2$ A_2 è ortogonalmente diagonalizzabile **(pt.5)**

Posto $k=2$, si determinino una matrice diagonale simile ad A_2, la relativa diagonalizzante e, se possibile, una diagonalizzante ortogonale.

Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.5)**

Dette R_1, R_2, R_3, R_4 le righe di A_k, siano U e W i sottospazi di R^4 generati rispettivamente da $[R_1, R_2]$ e $[R_3, R_4]$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determinino le dimensioni di U e W e si dica se esistono valori di k per i quali la somma $U+W$ è diretta.

Risposta $k \neq 0,2$: $dim\ U = 2$, $k = 0,2$: $dim\ U = 1$, $k=2$: $dim\ W = 1$, $k \neq 2$: $dim\ W = 2$; $U+W$ è diretta per $k \neq 1$. **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. Si dica per quali valori di $k \in \mathbb{C}$ i sistemi $r_k : \begin{cases} (k+1)y - z - k - 2 = 0 \\ kz + k = 0 \end{cases}$ e $s_k : \begin{cases} (k+1)x - k - 1 = 0 \\ kx - 2k = 0 \end{cases}$ rappresentano rette di $\tilde{A}_3(\mathbb{C})$.

Risposta $k \neq 0, -1$ **(pt.2)**

In tal caso, si determinino i valori di k, se esistono, per i quali:

- le rette sono proprie o improprie;

  Risposta per $k \neq 0, -1$ risulta r_k : $y - 1 = z + 1 = 0$ dunque r_k è propria;
  per $k \neq 0, -1$ risulta $s_k : x - 1 = x - 2 = 0$ dunque s_k è la retta impropria del piano $x = 0$. **(pt.1)**

- esiste un piano che le contiene entrambe.

  Risposta non esiste (non esiste piano parallelo al piano $x = 0$ contenente una retta parallela all'asse delle ascisse). **(pt.2)**

Posto $k=1$, si determini una rappresentazione cartesiana della superficie Σ generata dalla retta $t : \begin{cases} y - 1 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$ nella rotazione di asse r_1. Si riconosca Σ e si determini una rappresentazione cartesiana della sua conica impropria.

Risposta $x^2 - y^2 - z^2 + 2y - 2z - 2 = 0$ Si tratta di un cono dotato di falda reale con vertice $V = (0, 1, -1)$;
$\mathcal{C}_\infty : \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0 \end{cases}$ conica irriducibile dotata di punti reali. **(pt.5)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k : x^2 + ky^2 - 2xy - 1 = 0$, dove $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ è generale;
  Risposta $k \neq 1$ **(pt.1)**

- $\mathcal{C}_k$ è una parabola, un'ellisse o un'iperbole.
  Risposta ellisse per $k > 1$, iperbole per $k < 1$ **(pt.2)**

Posto $k = -1$ si riconosca $\mathcal{C}_{-1}$ e si determinino, se esistono e sono reali, centro, assi e asintoti di $\mathcal{C}_{-1}$.

Risposta Iperbole; $C = (0, 0)$, asintoti: $x - (1 \pm \sqrt{2})y = 0$, assi: $(1 \pm \sqrt{2})x - y = 0$ **(pt.3)**