1

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2° appello - 08.02.11

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 2 & k+2 & 1 \\ 1 & k+2 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} k \\ -2k \\ 3 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale.

- Si discuta al variare di $k \in \mathbb{R}$ la risolubilità del sistema lineare $AX = B$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;

  Risposta $k = -2$ incompatibile, $k = -1$ ∞^1 soluz., $k \neq -2, -1$ soluz. unica ______ **(pt.4)**

- posto $k = -1$ si determini l'insieme S delle soluzioni del sistema.

  Risposta $S = \{(\alpha, 1 - 3\alpha, 1 + \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.1)**

- si determinino una base e la dimensione di $\mathcal{L}(S)$;

  Risposta $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(S)} = ((1, -3, 1), (0, 1, 1))$, $\dim \mathcal{L}(S) = 2$ ______ **(pt.1)**

- interpretando x, y e z come coordinate affini in $\mathbb{A}_3(\mathbb{R})$ si discuta al variare di $k \in \mathbb{R}$ la mutua posizione del piano rappresentato dalla prima equazione del sistema e della retta rappresentata dal sistema costituito dalla seconda e terza equazione.

  Risposta $k = -2$ paralleli e disgiunti, $k = -1$ retta contenuta nel piano, $k \neq -2, -1$ incidenti _ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino i sistemi di vettori $A_k = [(1, 0, 0, 0), (k, 0, k, 0), (1, 2, 1, 0)]$ e $B_k = [(1, 0, k+1, 0), (k+1, 0, 1, k)]$. Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- la dimensione di $\mathcal{L}(A_k)$ e di $\mathcal{L}(B_k)$;

  Risposta $k = 0$ $\dim \mathcal{L}(A_0) = 2$, $\dim \mathcal{L}(B_0) = 1$, $k \neq 0$ $\dim \mathcal{L}(A_k) = 3$, $\dim \mathcal{L}(B_k) = 2$ ______ **(pt.2)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la somma $\mathcal{L}(A_k) + \mathcal{L}(B_k)$ è diretta;

  Risposta $k = 0$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{R})$ si consideri la conica $\mathcal{C}: \ 2x^2 + y^2 - 3xy - 4x + 3y = 0$.

- Si riconosca la conica $\mathcal{C}$ e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, punti impropri ed asintoti.

  Risposta Iperbole, $C = (1, 0)$, $A_\infty = [(1, 2, 0)]$, $B_\infty = [(1, 1, 0)]$, asintoti $2x - y - 2 = 0$, $x - y - 1 = 0$. **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino le rette $r_k: \ ky - 1 + k = 0 = x - z$ ed $a_k: \ (1-k)x + y = 0 = x - kz + 1$. Si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui le rette risultano complanari;

  Risposta $k = 1/2, 1$ ______ **(pt.1)**

- posto $k = 2$ una rappresentazione cartesiana della retta di minima distanza tra r_2 e a_2 (perpendicolare ed incidente ad entrambe);

  Risposta $x + 4y - z + 2 = 0 = x - 2y + 2z - 1$ ______ **(pt.3)**

- posto $k = 1$ un'equazione cartesiana della superficie $\mathscr{L}$ descritta dai punti di r_1 nella rotazione di asse a_1 e le coordinate degli eventuali punti doppi della superficie $\mathscr{L}$;

  Risposta $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz + 2x - 2z = 0$, $V_\infty = [(1, 0, 1, 0)]$ ______ **(pt.5)**

ESERCIZIO 5. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k ammette 3 autovalori distinti;

  Risposta $k \neq 1, 2$ ______ **(pt.2)**

- posto $k = 0$ una matrice diagonale D dimile ad A_0 e la matrice diagonalizzante P;

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2° appello - 08.02.11

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} k-1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & k \\ 3 & 1 & k \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} k-2 \\ 4-2k \\ 3 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale.

- Si discuta al variare di $k \in \mathbb{R}$ la risolubilità del sistema lineare $AX = B$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;
  Risposta $k = 0$ incompatibile, $k = 1$ ∞^1 soluz., $k \neq 0, 1$ soluz. unica ______ **(pt.4)**
- posto $k = 1$ si determini l'insieme S delle soluzioni del sistema.
  Risposta $S = \{(\alpha, -1, 4-3\alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.1)**
- si determinino una base e la dimensione di $\mathcal{L}(S)$;
  Risposta $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(S)} = ((1, 0, -3), (0, -1, 4))$, $\dim \mathcal{L}(S) = 2$ ______ **(pt.1)**
- interpretando x, y e z come coordinate affini in $\mathbb{A}_3(\mathbb{R})$ si discuta al variare di $k \in \mathbb{R}$ la mutua posizione del piano rappresentato dalla prima equazione del sistema e della retta rappresentata dal sistema costituito dalla seconda e terza equazione.
  Risposta $k = 0$ paralleli e disgiunti, $k = 1$ retta contenuta nel piano, $k \neq 0, 1$ incidenti ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino i sistemi di vettori $A_k = [(0, 1, 0, 0), (0, k, k-1, 0), (2, 0, 1, 0)]$ e $B_k = [(0, 1, k, 0), (0, k+1, k+1, k-1)]$. Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- la dimensione di $\mathcal{L}(A_k)$ e di $\mathcal{L}(B_k)$;
  Risposta $k = 1$ $\dim \mathcal{L}(A_1) = 2$, $\dim \mathcal{L}(B_1) = 1$, $k \neq 1$ $\dim \mathcal{L}(A_k) = 3$, $\dim \mathcal{L}(B_k) = 2$ ______ **(pt.2)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la somma $\mathcal{L}(A_k) + \mathcal{L}(B_k)$ è diretta;
  Risposta $k = 1$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{R})$ si consideri la conica $\mathcal{C}: \; x^2 + 2y^2 - 3xy - 2x + 3y - 1 = 0$.

- Si riconosca la conica $\mathcal{C}$ e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, punti impropri ed asintoti.
  Risposta Iperbole, $C = (1, 0)$, $A_\infty = [(2, 1, 0)]$, $B_\infty = [(1, 1, 0)]$, asintoti $x - 2y - 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$. **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino le rette $r_k: \; y - z = 0 = (k-1)x + k - 2$ ed $a_k: \; y + (1-k)z + 1 = 0 = x + (2-k)y$. Si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui le rette risultano complanari;
  Risposta $k = 3/2, 2$ ______ **(pt.1)**
- posto $k = 3$ una rappresentazione cartesiana della retta di minima distanza tra r_3 e a_3 (perpendicolare ed incidente ad entrambe);
  Risposta $4x + y - z + 2 = 0 = 2x - y - 2z + 1$ ______ **(pt.3)**
- posto $k = 2$ un'equazione cartesiana della superficie $\mathscr{L}$ descritta dai punti di r_2 nella rotazione di asse a_2 e le coordinate degli eventuali punti doppi della superficie $\mathscr{L}$;
  Risposta $2x^2 + y^2 + z^2 - 2yz + 2y - 2z = 0$, $V_\infty = [(0, 1, 1, 0)]$ ______ **(pt.5)**

ESERCIZIO 5. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 2 & k+1 \\ 2 & 0 & k \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k ammette 3 autovalori distinti;
  Risposta $k \neq 0, 2$ ______ **(pt.2)**
- posto $k = 1$ una matrice diagonale D dimile ad A_1 e la matrice diagonalizzante P;
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

3

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2° appello - 08.02.11

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 3 & 3-k & 3 \\ 2 & 3-k & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} k+1 \\ 3k \\ 3 \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale.

- Si discuta al variare di $k \in \mathbb{R}$ la risolubilità del sistema lineare $AX = B$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile;
  Risposta $k = 3$ incompatibile, $k = 2$ ∞^1 soluz., $k \neq 2, 3$ soluz. unica **(pt.4)**
- posto $k = 2$ si determini l'insieme S delle soluzioni del sistema.
  Risposta $S = \{(3-2\alpha, 3\alpha-3, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ **(pt.1)**
- si determinino una base e la dimensione di $\mathcal{L}(S)$;
  Risposta $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(S)} = ((3, -3, 0), (-2, 3, 1))$, $\dim \mathcal{L}(S) = 2$ **(pt.1)**
- interpretando x, y e z come coordinate affini in $\mathbb{A}_3(\mathbb{R})$ si discuta al variare di $k \in \mathbb{R}$ la mutua posizione del piano rappresentato dalla prima equazione del sistema e della retta rappresentata dal sistema costituito dalla seconda e terza equazione.
  Risposta $k = 3$ paralleli e disgiunti, $k = 2$ retta contenuta nel piano, $k \neq 2, 3$ incidenti **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con il prodotto scalare euclideo si considerino i sistemi di vettori $A_k = [(0, 0, 1, 0), (0, k-2, k, 0), (2, 1, 0, 0)]$ e $B_k = [(2, 0, k, 0), (k+1, 0, k+1, k-2)]$. Si determinino al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- la dimensione di $\mathcal{L}(A_k)$ e di $\mathcal{L}(B_k)$;
  Risposta $k = 2$ $\dim \mathcal{L}(A_2) = 2$, $\dim \mathcal{L}(B_2) = 1$, $k \neq 2$ $\dim \mathcal{L}(A_k) = 3$, $\dim \mathcal{L}(B_k) = 2$ **(pt.2)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la somma $\mathcal{L}(A_k) + \mathcal{L}(B_k)$ è diretta;
  Risposta $k = 2$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{R})$ si consideri la conica $\mathcal{C}:\ x^2 + 2y^2 + 3xy - 4x - 6y = 0$.

- Si riconosca la conica $\mathcal{C}$ e se ne determinino, se esistono e sono reali, centro, punti impropri ed asintoti.
  Risposta Iperbole, $C = (2, 0)$, $A_\infty = [(2, -1, 0)]$, $B_\infty = [(1, -1, 0)]$, asintoti $x + 2y - 2 = 0$, $x + y - 2 = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento cartesiano si considerino le rette $r_k:\ (2-k)y - k + 1 = 0 = x - z$ ed $a_k:\ (k-1)x + y = 0 = x + (k-2)z + 1$. Si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui le rette risultano complanari;
  Risposta $k = 3/2, 1$ **(pt.1)**
- posto $k = 3$ una rappresentazione cartesiana della retta di minima distanza tra r_3 e a_3 (perpendicolare ed incidente ad entrambe);
  Risposta $x - 2y - z - 4 = 0 = x + z + 1$ **(pt.3)**
- posto $k = 1$ un'equazione cartesiana della superficie $\mathscr{L}$ descritta dai punti di r_1 nella rotazione di asse a_1 e le coordinate degli eventuali punti doppi della superficie $\mathscr{L}$;
  Risposta $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xz + 2x - 2z = 0$, $V_\infty = [(1, 0, 1, 0)]$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 5. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ k & 3 & k+1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$, dove k è un parametro reale. Si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la matrice A_k ammette 3 autovalori distinti;
  Risposta $k \neq 0, 3$ **(pt.2)**
- posto $k = 1$ una matrice diagonale D dimile ad A_1 e la matrice diagonalizzante P;
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**