UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 5^o appello - 24/08/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il sistema lineare

$$\begin{cases} x + ky = 1 \\ x + y + (k-1)t = k+1 \\ (k-1)x + (2k-2)y - (2-k)z = k-1 \end{cases}.$$

- Se ne studi la compatibilità al variare del parametro, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile;

  Risposta $k \neq 1, 2$: comp., ∞^1 soluzioni; $k = 1$: non comp.; $k = 2$: comp., ∞^2 soluzioni ______ **(pt.3A)**

- posto $k = 2$ si determini una base della chiusura lineare dell'insieme delle soluzioni.

  Risposta $((1,0,0,2), (-2,1,0,1), (0,0,1,0))$ ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Si determini per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la somma dei due sottospazi $U = \mathcal{L}((0, 1+k, 0, k), (0, 2, 0, 1))$ e $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 = x_3, x_4 = 4x_2\}$ è diretta.
Risposta $k = 1$ ______ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 3. Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $\mathbf{v_k} = (1, k, k+1)$ è un autovettore della matrice $\begin{pmatrix} -10 & 2 & 7 \\ -8 & -2 & 8 \\ -12 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.
Risposta $k = 0, 1$ ______ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 4. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1+k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ è ortogonalmente diagonalizzabile?

Risposta $k = 0$ ______ **(pt.1A)**

Per tali valori si trovi una matrice ortogonale che diagonalizza A_k.

Risposta $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{3}/3 & 0 & \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{3}/3 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini, se esiste, un'equazione reale del piano reale passante per la retta $2x - 2iy + 3z - 2 = 0 = x + iy + 5$.
Risposta $4x + 3z + 8 = 0$ ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ dati la sfera Σ di equazione: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y = 0$ e il fascio di piani $\pi_k \ : \ k(x+y) + z - 2 = 0$ con $k \in \mathbb{R}$, si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'intersezione $\Sigma \cap \pi_k$ è una circonferenza di raggio 1.
Risposta $k = 0, 12$ ______ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{A}_2(\mathbb{C})$ si consideri l'insieme delle coniche $\mathcal{C}_{h,k} \ : \ x^2 + y^2 + xy + hx + ky + 1 = 0, \ h, k \in \mathbb{R}$.

- Al variare di $h, k \in \mathbb{R}$ si riconosca la conica $\mathcal{C}_{h,k}$.

  Risposta ellisse per ogni $h, k \in \mathbb{R}$ tali che $k \neq \frac{h \pm \sqrt{3(4-h^2)}}{2}$, degenere altrimenti ______ **(pt.2G)**

- Si determinino i valori reali di h e k per i quali il centro di $\mathcal{C}_{h,k}$ appartiene alla retta $x = y$.

  Risposta $k = h, \quad h \neq \pm\sqrt{3}$ ______ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 8. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica di equazione $\mathcal{Q} : \ 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 4xz + 2yz - 1 = 0$.

- Si riconosca $\mathcal{Q}$ e si precisi la natura dei suoi punti semplici.

  Risposta Cilindro ellittico, punti semplici parabolici ______ **(pt.3G)**

- Si scrivano, se esistono, le equazioni cartesiane di un piano α tale che $\mathcal{Q} \cap \alpha$ sia una ellisse e di un piano β tale che $\mathcal{Q} \cap \beta$ sia una parabola. Nel caso in cui il piano non esista si motivi la risposta.

  Risposta $\alpha \ : \ z = 0$; β non esiste perché le sezioni piane irriducibili di un cilindro ellittico sono tutte ellissi __ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 5^o appello - 24/08/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il sistema lineare

$$\begin{cases} x + (k-2)y = 1 \\ x + y + (k-3)z = k-1 \\ (k-3)x + (2k-6)y + (4-k)t = k-3 \end{cases}.$$

- Se ne studi la compatibilità al variare del parametro, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile;

  Risposta $k \neq 3, 4$: comp., ∞^1 soluzioni; $k = 3$: non comp.; $k = 4$: comp., ∞^2 soluzioni ________ **(pt.3A)**

- posto $k = 4$ si determini una base della chiusura lineare dell'insieme delle soluzioni.

  Risposta $((1,0,2,0), (-2,1,1,0), (0,0,0,1))$ ________ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Si determini per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la somma dei due sottospazi $U = \mathcal{L}((0, k-3, 0, k-4), (0,2,0,1))$ e $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 = x_3, x_4 = 4x_2\}$ è diretta.
Risposta $k = 5$ ________ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 3. Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $\mathbf{v_k} = (1, k+2, k+3)$ è un autovettore della matrice $\begin{pmatrix} -10 & 2 & 7 \\ -8 & -2 & 8 \\ -12 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.
Risposta $k = -2, -1$ ________ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 4. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 3+k & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1-k \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ è ortogonalmente diagonalizzabile?

Risposta $k = -1$ ________ **(pt.1A)**

Per tali valori si trovi una matrice ortogonale che diagonalizza A_k.

Risposta $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{3}/3 & 0 & \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{3}/3 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 \end{pmatrix}$ ________ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini, se esiste, un'equazione reale del piano reale passante per la retta $2ix - 2y - 3z + 2 = 0 = ix + y + 5$.
Risposta $4y + 3z + 8 = 0$ ________ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ dati la sfera Σ di equazione: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y = 0$ e il fascio di piani $\pi_k \ : \ 3k(x+y) + z - 2 = 0$ con $k \in \mathbb{R}$, si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'intersezione $\Sigma \cap \pi_k$ è una circonferenza di raggio 1.
Risposta $k = 0, 4$ ________ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{A}_2(\mathbb{C})$ si consideri l'insieme delle coniche $\mathcal{C}_{h,k} \ : \ x^2 - y^2 + xy + 2hx + ky + 1 = 0, \ h, k \in \mathbb{R}$.

- Al variare di $h, k \in \mathbb{R}$ si riconosca la conica $\mathcal{C}_{h,k}$.

  Risposta iperbole per ogni $h, k \in \mathbb{R}$ tali che $k \neq h \pm \sqrt{5(h^2-1)}$, degenere altrimenti ________ **(pt.2G)**

- Si determinino i valori reali di h e k per i quali il centro di $\mathcal{C}_{h,k}$ appartiene alla retta $x = y$.

  Risposta $k = -2h/3, \quad h \neq \pm 3/2$ ________ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 8. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica di equazione $\mathcal{Q} : \ 2x^2 - y^2 + z^2 + 4xz - 2yz - 1 = 0$.

- Si riconosca $\mathcal{Q}$ e si precisi la natura dei suoi punti semplici.

  Risposta Cilindro iperbolico, punti semplici parabolici ________ **(pt.3G)**

- Si scrivano, se esistono, le equazioni cartesiane di un piano α tale che $\mathcal{Q} \cap \alpha$ sia una ellisse e di un piano β tale che $\mathcal{Q} \cap \beta$ sia una iperbole. Nel caso in cui il piano non esista si motivi la risposta.

  Risposta α non esiste perché le sezioni piane irriducibili di un cilindro iperbolico sono tutte iperboli; $\beta \ : \ z = 0$ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 5^o appello - 24/08/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il sistema lineare

$$\begin{cases} x + (k+2)z = 1 \\ x + z + (k+1)t = k+3 \\ (k+1)x - ky + (2+2k)z = k+1 \end{cases} .$$

- Se ne studi la compatibilità al variare del parametro, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile;

  Risposta $k \neq -1, 0$: comp., ∞^1 soluzioni; $k = -1$: non comp.; $k = 0$: comp., ∞^2 soluzioni ______ **(pt.3A)**

- posto $k = 0$ si determini una base della chiusura lineare dell'insieme delle soluzioni.

  Risposta $((1,0,0,2), (-2,0,1,1), (0,1,0,0))$ ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Si determini per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la somma dei due sottospazi $U = \mathcal{L}((0, 4+k, 0, 3+k), (0,2,0,1))$ e $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 = x_3, x_4 = 4x_2\}$ è diretta.
Risposta $k = -2$ ______ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 3. Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $\mathbf{v_k} = (1, k-1, k)$ è un autovettore della matrice $\begin{pmatrix} -10 & 2 & 7 \\ -8 & -2 & 8 \\ -12 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.
Risposta $k = 1, 2$ ______ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 4. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 5+k & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1-k \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ è ortogonalmente diagonalizzabile?

Risposta $k = -2$ ______ **(pt.1A)**

Per tali valori si trovi una matrice ortogonale che diagonalizza A_k.

Risposta $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{3}/3 & 0 & \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{3}/3 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini, se esiste, un'equazione reale del piano reale passante per la retta $2x + 3y - 2iz - 2 = 0 = x + iz + 5$.
Risposta $4x + 3y + 8 = 0$ ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ dati la sfera Σ di equazione: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y = 0$ e il fascio di piani $\pi_k \ : \ 2k(x+y) + z - 2 = 0$ con $k \in \mathbb{R}$, si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'intersezione $\Sigma \cap \pi_k$ è una circonferenza di raggio 1.
Risposta $k = 0, 6$ ______ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{A}_2(\mathbb{C})$ si consideri l'insieme delle coniche $\mathcal{C}_{h,k} \ : \ x^2 + y^2 + xy + hx + 2ky + 1 = 0, \ h, k \in \mathbb{R}$.

- Al variare di $h, k \in \mathbb{R}$ si riconosca la conica $\mathcal{C}_{h,k}$.

  Risposta ellisse per ogni $h, k \in \mathbb{R}$ tali che $k \neq \frac{h \pm \sqrt{3(4-h^2)}}{4}$, degenere altrimenti ______ **(pt.2G)**

- Si determinino i valori reali di h e k per i quali il centro di $\mathcal{C}_{h,k}$ appartiene alla retta $x = y$.

  Risposta $k = h/2, \quad h \neq \pm\sqrt{3}$ ______ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 8. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica di equazione $\mathcal{Q} : \ 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 4xz + 2yz - 1 = 0$.

- Si riconosca $\mathcal{Q}$ e si precisi la natura dei suoi punti semplici.

  Risposta Cilindro ellittico, punti semplici parabolici ______ **(pt.3G)**

- Si scrivano, se esistono, le equazioni cartesiane di un piano α tale che $\mathcal{Q} \cap \alpha$ sia una iperbole e di un piano β tale che $\mathcal{Q} \cap \beta$ sia una ellisse. Nel caso in cui il piano non esista si motivi la risposta.

  Risposta α non esiste perché le sezioni piane irriducibili di un cilindro ellittico sono tutte ellissi ; $\beta \ : \ z = 0$ _ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 5^o appello - 24/08/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il sistema lineare

$$\begin{cases} (k-1)y + z = 1 \\ y + z + (k-2)t = k \\ (3-k)x + (2k-4)y + (k-2)z = k-2 \end{cases}.$$

- Se ne studi la compatibilità al variare del parametro, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile;

  Risposta $k \neq 2, 3$: comp., ∞^1 soluzioni; $k = 2$: non comp.; $k = 3$: comp., ∞^2 soluzioni ________ **(pt.3A)**

- posto $k = 3$ si determini una base della chiusura lineare dell'insieme delle soluzioni.

  Risposta $((0, 0, 1, 2), (0, 1, -2, 1), (1, 0, 0, 0))$ ________ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Si determini per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la somma dei due sottospazi $U = \mathcal{L}((0, k+3, 0, k+2), (0, 2, 0, 1))$ e $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 = x_3, x_4 = 4x_2\}$ è diretta.
Risposta $k = -1$ ________ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 3. Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il vettore $\mathbf{v_k} = (1, k-2, k-1)$ è un autovettore della matrice $\begin{pmatrix} -10 & 2 & 7 \\ -8 & -2 & 8 \\ -12 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.
Risposta $k = 2, 3$ ________ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 4. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 3+k & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 5-k \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ è ortogonalmente diagonalizzabile?

Risposta $k = 1$ ________ **(pt.1A)**

Per tali valori si trovi una matrice ortogonale che diagonalizza A_k.

Risposta $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{3}/3 & 0 & \sqrt{6}/3 \\ \sqrt{3}/3 & -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 \end{pmatrix}$ ________ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini, se esiste, un'equazione reale del piano reale passante per la retta $3x - 2iy + 2z - 2 = 0 = iy + z + 5$.
Risposta $3x + 4z + 8 = 0$ ________ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ dati la sfera Σ di equazione: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y = 0$ e il fascio di piani $\pi_k \ : \ 4k(x+y) + z - 2 = 0$ con $k \in \mathbb{R}$, si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'intersezione $\Sigma \cap \pi_k$ è una circonferenza di raggio 1.
Risposta $k = 0, 3$ ________ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{A}_2(\mathbb{C})$ si consideri l'insieme delle coniche $\mathcal{C}_{h,k} \ : \ x^2 - y^2 + xy + hx + (1-k)y + 1 = 0, \ h, k \in \mathbb{R}$.

- Al variare di $h, k \in \mathbb{R}$ si riconosca la conica $\mathcal{C}_{h,k}$.

  Risposta iperbole per ogni $h, k \in \mathbb{R}$ tali che $k \neq \frac{2-h\pm\sqrt{5h^2-20}}{2}$, degenere altrimenti ________ **(pt.2G)**

- Si determinino i valori reali di h e k per i quali il centro di $\mathcal{C}_{h,k}$ appartiene alla retta $x = y$.

  Risposta $k = (h+3)/3, \quad h \neq \pm 3$ ________ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 8. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica di equazione $\mathcal{Q} : \ x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz - 4x = 0$.

- Si riconosca $\mathcal{Q}$ e si precisi la natura dei suoi punti semplici.

  Risposta Cilindro parabolico, punti semplici parabolici ________ **(pt.3G)**

- Si scrivano, se esistono, le equazioni cartesiane di un piano α tale che $\mathcal{Q} \cap \alpha$ sia una parabola e di un piano β tale che $\mathcal{Q} \cap \beta$ sia una ellisse. Nel caso in cui il piano non esista si motivi la risposta.

  Risposta $\alpha \ : \ z = 0$; β non esiste perché le sezioni piane irriducibili di un cilindro parabolico sono tutte parabole **(pt.2G)**