UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 4^o appello - 27/06/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $M_3(\mathbb{R})$ si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $A_k = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ risultano simili e, per ciascuno di tali valori, una matrice P tale che $B = P^{-1}AP$.

Risposta $k = 1, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}; \quad k = -1, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio affine $A_3(\mathbb{R})$ si considerino, al variare del parametro reale k, il piano $\pi_k : \ x-y+k=0$ e la retta $r_k : \begin{cases} y + (k-1)z + 1 = 0 \\ x + (k-2)y + z + 3 = 0 \end{cases}$. Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:

- r_k e π_k sono tra loro paralleli;

  Risposta $k = 0, 2$ **(pt.2)**
- r_k e π_k sono incidenti in un punto;

  Risposta $k \neq 0, 2$ **(pt.2)**
- $r_k \subseteq \pi_k$.

  Risposta $k = 2$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, dotato di prodotto scalare euclideo, si consideri al variare del parametro reale k la sequenza $A_k = ((1,0,1,0), (k+1,k,0,-1), (1,0,-1,k+1), (0,k,0,1))$. Si determinino, se possibile, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:

- A_k è una base di $\mathbb{R}^4$;

  Risposta $k \neq 0$ **(pt.1)**
- A_k è una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$;

  Risposta $k = -1$ **(pt.2)**
- A_k è una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$;

  Risposta $\nexists\, k \in \mathbb{R}$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la sfera $\Sigma_k : \ x^2 + y^2 + z^2 - 2kx + 2y - 2k = 0$ è tangente al piano $\pi : \ x + y + 1 = 0$.

Risposta $k = -2 \pm \sqrt{2}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k : \ (1-k)x^2 + ky^2 - 2xy + 2y + k - 1 = 0$, dove $k \in \mathbb{R}$.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è riducibile e, per ciascuno di tali valori, le coordinate dei punti doppi di $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k = 0 \quad D_0 = (1,1), \qquad k = 1 \quad D_1 = (1,0)$ **(pt.3)**
- si riconoscano, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le coniche generali;

  Risposta $k \neq 0, 1$ iperbole **(pt.2)**
- si determini un'equazione cartesiana del luogo descritto dai centri delle coniche $\mathcal{C}_k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ e si riconosca tale luogo.

  Risposta $x^2 + y^2 - xy - x = 0$ ellisse **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q} : \ x^2 + 2xy + z^2 + 4x - 2y + 4z = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$ precisando la natura dei suoi punti semplici;

  Risposta Iperboloide ellittico **(pt.3)**
- si riconoscano le sezioni piane di $\mathcal{Q}$ con i piani $\alpha : \ x = 0$ e $\beta : \ z = 0$, precisando le rette componenti qualora la sezione risulti riducibile.

  Risposta $\mathcal{C}_\alpha :$ parabola, $\mathcal{C}_\beta :$ iperbole **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 4^o appello - 27/06/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $M_3(\mathbb{R})$ si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $A_k = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & k+1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ risultano simili e, per ciascuno di tali valori, una matrice P tale che $B = P^{-1}AP$.

Risposta $k = 0$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$; $k = -2$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio affine $A_3(\mathbb{R})$ si considerino, al variare del parametro reale k, il piano $\pi_k: \ x-y+k-1 = 0$ e la retta $r_k: \begin{cases} y + (k-2)z + 1 = 0 \\ x + (k-3)y + z + 3 = 0 \end{cases}$. Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:

- r_k e π_k sono tra loro paralleli;

  Risposta $k = 1, 3$ **(pt.2)**

- r_k e π_k sono incidenti in un punto;

  Risposta $k \neq 1, 3$ **(pt.2)**

- $r_k \subseteq \pi_k$.

  Risposta $k = 3$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, dotato di prodotto scalare euclideo, si consideri al variare del parametro reale k la sequenza $A_k = ((1, 0, 1, 0), (k, k-1, 0, -1), (1, 0, -1, k), (0, k-1, 0, 1))$. Si determinino, se possibile, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:

- A_k è una base di $\mathbb{R}^4$;

  Risposta $k \neq 1$ **(pt.1)**

- A_k è una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$;

  Risposta $k = 0$ **(pt.2)**

- A_k è una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$;

  Risposta $\nexists\, k \in \mathbb{R}$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la sfera $\Sigma_k: \ x^2 + y^2 + z^2 - 2kx + 2y - 2k = 0$ è tangente al piano $\pi: \ 2x + 2y - 1 = 0$.

Risposta $k = \frac{-7 \pm 5\sqrt{2}}{2}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k: \ (1+k)x^2 - ky^2 - 2xy + 2x + k = 0$, dove $k \in \mathbb{R}$.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è riducibile e, per ciascuno di tali valori, le coordinate dei punti doppi di $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k = -1$ $D_{-1} = (1, 1)$, $k = 0$ $D_0 = (0, 1)$ **(pt.3)**

- si riconoscano, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le coniche generali;

  Risposta $k \neq -1, 0$ iperbole **(pt.2)**

- si determini un'equazione cartesiana del luogo descritto dai centri delle coniche $\mathcal{C}_k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ e si riconosca tale luogo.

  Risposta $x^2 + y^2 - xy - y = 0$ ellisse **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}: \ x^2 + 2xy + z^2 + 4x + 2y + 4z = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$ precisando la natura dei suoi punti semplici;

  Risposta Iperboloide iperbolico **(pt.3)**

- si riconoscano le sezioni piane di $\mathcal{Q}$ con i piani $\alpha: \ z = 0$ e $\beta: \ y = 0$, precisando le rette componenti qualora la sezione risulti riducibile.

  Risposta $\mathcal{C}_\alpha:$ iperbole, $\mathcal{C}_\beta:$ ellisse **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 4^o appello - 27/06/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $M_3(\mathbb{R})$ si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $A_k = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2k \\ 0 & 2k & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ risultano simili e, per ciascuno di tali valori, una matrice P tale che $B = P^{-1}AP$.

Risposta $k = 1/2$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $k = -1/2$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio affine $A_3(\mathbb{R})$ si considerino, al variare del parametro reale k, il piano $\pi_k :\ x-y+k+1 = 0$ e la retta $r_k : \begin{cases} y + kz + 1 = 0 \\ x + (k-1)y + z + 3 = 0 \end{cases}$. Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:

- r_k e π_k sono tra loro paralleli;

  Risposta $k = \pm 1$ **(pt.2)**
- r_k e π_k sono incidenti in un punto;

  Risposta $k \neq \pm 1$ **(pt.2)**
- $r_k \subseteq \pi_k$.

  Risposta $k = 1$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, dotato di prodotto scalare euclideo, si consideri al variare del parametro reale k la sequenza $A_k = ((1,0,1,0),(k+3,k+2,0,-1),(1,0,-1,k+3),(0,k+2,0,1))$. Si determinino, se possibile, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:

- A_k è una base di $\mathbb{R}^4$;

  Risposta $k \neq -2$ **(pt.1)**
- A_k è una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$;

  Risposta $k = -3$ **(pt.2)**
- A_k è una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$;

  Risposta $\nexists\, k \in \mathbb{R}$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la sfera $\Sigma_k :\ x^2 + y^2 + z^2 - 2kx + 2y - 2k = 0$ è tangente al piano $\pi :\ 2x + 2y + 1 = 0$.

Risposta $k = \frac{-5 \pm 3\sqrt{2}}{2}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k :\ kx^2 + (1-k)y^2 - 2xy + 2x + k - 1 = 0$, dove $k \in \mathbb{R}$.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è riducibile e, per ciascuno di tali valori, le coordinate dei punti doppi di $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k = 0$ $D_0 = (1,1)$, $k = 1$ $D_1 = (0,1)$ **(pt.3)**
- si riconoscano, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le coniche generali;

  Risposta $k \neq 0, 1$ iperbole **(pt.2)**
- si determini un'equazione cartesiana del luogo descritto dai centri delle coniche $\mathcal{C}_k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ e si riconosca tale luogo.

  Risposta $x^2 + y^2 - xy - y = 0$ ellisse **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q} :\ x^2 + 2xy + z^2 + 4x - 2y + 4z = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$ precisando la natura dei suoi punti semplici;

  Risposta Iperboloide ellittico **(pt.3)**
- si riconoscano le sezioni piane di $\mathcal{Q}$ con i piani $\alpha :\ y = 0$ e $\beta :\ x = 0$, precisando le rette componenti qualora la sezione risulti riducibile.

  Risposta $\mathcal{C}_\alpha :$ ellisse, $\mathcal{C}_\beta :$ parabola **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 4^o appello - 27/06/2017

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $M_3(\mathbb{R})$ si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $A_k = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k-1 \\ 0 & k-1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ risultano simili e, per ciascuno di tali valori, una matrice P tale che $B = P^{-1}AP$.

Risposta $k = 2, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}; \quad k = 0, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio affine $A_3(\mathbb{R})$ si considerino, al variare del parametro reale k, il piano $\pi_k:\ x - y + k + 2 = 0$ e la retta $r_k: \begin{cases} y + (k+1)z + 1 = 0 \\ x + ky + z + 3 = 0 \end{cases}$. Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:

- r_k e π_k sono tra loro paralleli;

  Risposta $k = -2, 0$ **(pt.2)**

- r_k e π_k sono incidenti in un punto;

  Risposta $k \neq -2, 0$ **(pt.2)**

- $r_k \subseteq \pi_k$.

  Risposta $k = 0$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$, dotato di prodotto scalare euclideo, si consideri al variare del parametro reale k la sequenza $A_k = ((1,0,1,0), (k+2, k+1, 0, -1), (1, 0, -1, k+2), (0, k+1, 0, 1))$. Si determinino, se possibile, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:

- A_k è una base di $\mathbb{R}^4$;

  Risposta $k \neq -1$ **(pt.1)**

- A_k è una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$;

  Risposta $k = -2$ **(pt.2)**

- A_k è una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$;

  Risposta $\nexists\, k \in \mathbb{R}$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui la sfera $\Sigma_k:\ x^2 + y^2 + z^2 - 2kx + 2y - 2k = 0$ è tangente al piano $\pi:\ x + y - 1 = 0$.

Risposta $k = -4 \pm 3\sqrt{2}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k:\ kx^2 - (1+k)y^2 + 2xy - 2y - k = 0$, dove $k \in \mathbb{R}$.

- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è riducibile e, per ciascuno di tali valori, le coordinate dei punti doppi di $\mathcal{C}_k$;

  Risposta $k = -1 \quad D_{-1} = (1,1), \qquad k = 0 \quad D_0 = (1,0)$ **(pt.3)**

- si riconoscano, al variare di $k \in \mathbb{R}$, le coniche generali;

  Risposta $k \neq -1, 0$ iperbole **(pt.2)**

- si determini un'equazione cartesiana del luogo descritto dai centri delle coniche $\mathcal{C}_k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$ e si riconosca tale luogo.

  Risposta $x^2 + y^2 - xy - x = 0$ ellisse **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q}:\ x^2 + 2xy + z^2 + 4x + 2y + 4z = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$ precisando la natura dei suoi punti semplici;

  Risposta Iperboloide iperbolico **(pt.3)**

- si riconoscano le sezioni piane di $\mathcal{Q}$ con i piani $\alpha:\ y = 0$ e $\beta:\ z = 0$, precisando le rette componenti qualora la sezione risulti riducibile.

  Risposta $\mathcal{C}_\alpha:$ ellisse, $\quad \mathcal{C}_\beta:$ iperbole **(pt.3)**