UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 3^o appello - 27/3/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & k & -2 \\ 0 & k & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$. $k = 0 : \infty^1$ soluzioni; $k \neq 0$: soluzione unica ______ **(pt.3A)**

- Si dica per quali valori reali di k la terna $(0, 3, 0)$ è soluzione del sistema.

  Risposta $k = 0$ ______ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ sia $A = ((0,1,2,-3),(1,-1,3,0),(2,-3,4,3))$. Se possibile, si completi A in modo da ottenere una base di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$. Nel caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta Non è possibile perché i vettori di A sono linearmente dipendenti. ______ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, dato il sottospazio $U = \{(\alpha,0,0) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$, si determinino, se esistono:

- un sottospazio vettoriale W_1 di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ tale che $U \cup W_1$ sia un sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$;
- un sottospazio vettoriale W_2 di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ tale che $U \cup W_2$ non sia un sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$.

Risposta $W_=\{0\}$; $W_2 = \{(0,\beta,0) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \beta \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 4. In $M_3(\mathbb{R})$, data $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$, si determini:

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile;

  Risposta $k = 1$ ______ **(pt.2A)**

- posto $k = 2$, una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A_2.

  Risposta $((0,1,0),(1,0,-2),(1,0,1))$ ______ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{A}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione reale di una retta reale, se esiste, che appartenga al piano $\alpha \ : \ 2x - iy + 3z + 7i = 0$.

Risposta $2x + 3z = 0 = y - 7$ ______ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$, dati il punto $P = (1,0,-3)$ e il piano $\alpha \ : \ x + y - 4z + 5 = 0$, si determini:

- le coordinate della proiezione ortogonale di P sul piano α;

  Risposta $(0,-1,1)$ ______ **(pt.2G)**

- un'equazione cartesiana del piano passante per P e contenente la retta impropria di α.

  Risposta $x + y - 4z - 13 = 0$ ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$, data la conica $\mathcal{C}_k \ : \ (k+1)x^2 + y^2 - (k+2)y = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino i valori di k per i quali:

- la conica $\mathcal{C}_k$ non ha punti doppi;

  Risposta $k \neq -2, -1$ ______ **(pt.2G)**

- il punto $P = (1,1)$ appartiene alla propria polare, nella polarità indotta da $\mathcal{C}_k$.

  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 8. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica di equazione $\mathcal{Q}_k \ : \ (k+1)x^2 + y^2 + (k-2)z^2 - 2yz + 2(k+1)x + 4 = 0$, con $k \in \mathbb{R}$. Si determini per quali k:

- la quadrica $\mathcal{Q}_k$ è riducibile;

  Risposta $k = 3$ ______ **(pt.2G)**

- la quadrica $\mathcal{Q}_k$ è a punti parabolici.

  Risposta $k = -1$ ______ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 3^o appello - 27/3/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k+2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & k+2 & -2 \\ 0 & k+2 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$. $k = -2 : \infty^1$ soluzioni; $k \neq -2$: soluzione unica ______ **(pt.3A)**

- Si dica per quali valori reali di k la terna $(1, 0, 0)$ è soluzione del sistema.

  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ sia $A = ((3, 0, -2, 1), (-1, 4, 0, 2), (5, -8, -2, -3))$. Se possibile, si completi A in modo da ottenere una base di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$. Nel caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta Non è possibile perché i vettori di A sono linearmente dipendenti. ______ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, dato il sottospazio $U = \{(0, \alpha, 0) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$, si determinino, se esistono:

- un sottospazio vettoriale W_1 di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ tale che $U \cup W_1$ sia un sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$;
- un sottospazio vettoriale W_2 di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ tale che $U \cup W_2$ non sia un sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$.

Risposta $W_1 = \{0\}$; $W_2 = \{(\beta, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \beta \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 4. In $M_3(\mathbb{R})$, data $A_k = \begin{pmatrix} k+3 & 0 & k+3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$, si determini:

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile;

  Risposta $k = -2$ ______ **(pt.2A)**

- posto $k = 3$, una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A_3.

  Risposta $((1, 0, -1), (0, 1, 0), (6, 0, 1))$ ______ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{A}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione reale di una retta reale, se esiste, che appartenga al piano $\alpha \ : \ 5x + iy - 2z - 4i = 0$.
Risposta $5x - 2z = 0 = y - 4$ ______ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$, dati il punto $P = (3, 0, 2)$ e il piano $\alpha \ : \ 2x - y + 3z + 2 = 0$, si determini:

- le coordinate della proiezione ortogonale di P sul piano α;

  Risposta $(1, 1, -1)$ ______ **(pt.2G)**

- un'equazione cartesiana del piano passante per P e contenente la retta impropria di α.

  Risposta $2x - y + 3z - 12 = 0$ ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$, data la conica $\mathcal{C}_k \ : \ kx^2 + y^2 - (k+1)y = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino i valori di k per i quali:

- la conica $\mathcal{C}_k$ non ha punti doppi;

  Risposta $k \neq -1, 0$ ______ **(pt.2G)**

- il punto $P = (0, 2)$ appartiene alla propria polare, nella polarità indotta da $\mathcal{C}_k$.

  Risposta $k = 1$ ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 8. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica di equazione $\mathcal{Q}_k \ : \ (k+4)x^2 + y^2 + (k+1)z^2 - 2yz + 2(k+4)x + 4 = 0$, con $k \in \mathbb{R}$. Si determini per quali k:

- la quadrica $\mathcal{Q}_k$ è riducibile;

  Risposta $k = 0$ ______ **(pt.2G)**

- la quadrica $\mathcal{Q}_k$ è a punti parabolici.

  Risposta $k = -4$ ______ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 3^o appello - 27/3/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k-1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & k-1 & -2 \\ 0 & k-1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$. $k = 1 : \infty^1$ soluzioni; $k \neq 1$: soluzione unica ________ **(pt.3A)**

- Si dica per quali valori reali di k la terna $(0, 4, 0)$ è soluzione del sistema.

  Risposta $k = 1$ ________ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ sia $A = ((2, 3, -4, 0), (1, 0, -1, 2), (0, 3, -2, -4))$. Se possibile, si completi A in modo da ottenere una base di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$. Nel caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta Non è possibile perché i vettori di A sono linearmente dipendenti. ________ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, dato il sottospazio $U = \{(0, 0, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$, si determinino, se esistono:

- un sottospazio vettoriale W_1 di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ tale che $U \cup W_1$ sia un sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$;
- un sottospazio vettoriale W_2 di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ tale che $U \cup W_2$ non sia un sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$.

Risposta $W_1 = \{0\}$; $W_2 = \{(\beta, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \beta \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 4. In $M_3(\mathbb{R})$, data $A_k = \begin{pmatrix} k-4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ k-4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$, si determini:

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile;

  Risposta $k = 5$ ________ **(pt.2A)**

- posto $k = 6$, una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A_6.

  Risposta $((0, 1, 0), (1, 0, -2), (1, 0, 1))$ ________ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{A}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione reale di una retta reale, se esiste, che appartenga al piano $\alpha \ : \ x + 2iy + 3z - i = 0$.
Risposta $x + 3z = 0 = 2y - 1$ ________ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$, dati il punto $P = (-3, -4, 1)$ e il piano $\alpha \ : \ x - 3y + z + 1 = 0$, si determini:

- le coordinate della proiezione ortogonale di P sul piano α;

  Risposta $(-4, -1, 0)$ ________ **(pt.2G)**

- un'equazione cartesiana del piano passante per P e contenente la retta impropria di α.

  Risposta $x - 3y + z - 10 = 0$ ________ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$, data la conica $\mathcal{C}_k \ : \ (k-1)x^2 + y^2 - ky = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino i valori di k per i quali:

- la conica $\mathcal{C}_k$ non ha punti doppi;

  Risposta $k \neq 0, 1$ ________ **(pt.2G)**

- il punto $P = (1, 1)$ appartiene alla propria polare, nella polarità indotta da $\mathcal{C}_k$.

  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ ________ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 8. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica di equazione $\mathcal{Q}_k \ : \ (k-2)x^2 + y^2 + (k-5)z^2 - 2yz + 2(k-2)x + 4 = 0$, con $k \in \mathbb{R}$. Si determini per quali k:

- la quadrica $\mathcal{Q}_k$ è riducibile;

  Risposta $k = 6$ ________ **(pt.2G)**

- la quadrica $\mathcal{Q}_k$ è a punti parabolici.

  Risposta $k = 2$ ________ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 3^o appello - 27/3/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k+3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & k+3 & -2 \\ 0 & k+3 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$. $k = -3 : \infty^1$ soluzioni; $k \neq -3$: soluzione unica **(pt.3A)**

- Si dica per quali valori reali di k la terna $(0, 0, 1)$ è soluzione del sistema.

  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ sia $A = ((1, 0, 2, -3), (-1, 1, 3, 0), (-3, 2, 4, 3))$. Se possibile, si completi A in modo da ottenere una base di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$. Nel caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta Non è possibile perché i vettori di A sono linearmente dipendenti. **(pt.3A)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, dato il sottospazio $U = \{(\alpha, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$, si determinino, se esistono:

- un sottospazio vettoriale W_1 di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ tale che $U \cup W_1$ sia un sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$;
- un sottospazio vettoriale W_2 di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ tale che $U \cup W_2$ non sia un sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$.

Risposta $W_1 = \{0\}$; $W_2 = \{(0, \beta, 0) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 4. In $M_3(\mathbb{R})$, data $A_k = \begin{pmatrix} k+2 & 0 & k+2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$, si determini:

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile;

  Risposta $k = -1$ **(pt.2A)**

- posto $k = 6$, una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A_6.

  Risposta $((1, 0, -1), (0, 1, 0), (8, 0, 1))$ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{A}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione reale di una retta reale, se esiste, che appartenga al piano $\alpha \ : \ 2ix - y + 5iz + 3 = 0$.

Risposta $2x + 5z = 0 = y - 3$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$, dati il punto $P = (-3, 0, 1)$ e il piano $\alpha \ : \ 4x - y - z - 5 = 0$, si determini:

- le coordinate della proiezione ortogonale di P sul piano α;

  Risposta $(1, -1, 0)$ **(pt.2G)**

- un'equazione cartesiana del piano passante per P e contenente la retta impropria di α.

  Risposta $4x - y - z + 13 = 0$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$, data la conica $\mathcal{C}_k \ : \ (k+2)x^2 + y^2 - (k+3)y = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino i valori di k per i quali:

- la conica $\mathcal{C}_k$ non ha punti doppi;

  Risposta $k \neq -3, -2$ **(pt.2G)**

- il punto $P = (0, 2)$ appartiene alla propria polare, nella polarità indotta da $\mathcal{C}_k$.

  Risposta $k = -1$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 8. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica di equazione $\mathcal{Q}_k \ : \ (k+2)x^2 + y^2 + (k-1)z^2 - 2yz + 2(k+2)x + 4 = 0$, con $k \in \mathbb{R}$. Si determini per quali k:

- la quadrica $\mathcal{Q}_k$ è riducibile;

  Risposta $k = 2$ **(pt.2G)**

- la quadrica $\mathcal{Q}_k$ è a punti parabolici.

  Risposta $k = -2$ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 3^o appello - 27/3/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k+1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & k+1 & -2 \\ 0 & k+1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$. $k = -1 : \infty^1$ soluzioni; $k \neq -1$: soluzione unica **(pt.3A)**

- Si dica per quali valori reali di k la terna $(0, -1, 0)$ è soluzione del sistema.

  Risposta $k = -1$ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ sia $A = ((0, 3, -2, 1), (4, -1, 0, 2), (-8, 5, -2, -3))$. Se possibile, si completi A in modo da ottenere una base di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$. Nel caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta Non è possibile perché i vettori di A sono linearmente dipendenti. **(pt.3A)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, dato il sottospazio $U = \{(0, \alpha, 0) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$, si determinino, se esistono:

- un sottospazio vettoriale W_1 di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ tale che $U \cup W_1$ sia un sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$;
- un sottospazio vettoriale W_2 di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ tale che $U \cup W_2$ non sia un sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$.

Risposta $W_1 = \{0\}$; $W_2 = \{(\beta, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 4. In $M_3(\mathbb{R})$, data $A_k = \begin{pmatrix} k+5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ k+5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$, si determini:

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile;

  Risposta $k = -4$ **(pt.2A)**

- posto $k = 2$, una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A_2.

  Risposta $((0, 1, 0), (1, 0, -7), (1, 0, 1))$ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{A}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione reale di una retta reale, se esiste, che appartenga al piano $\alpha \ : \ ix + 2y - iz + 7 = 0$.

Risposta $x - z = 0 = 2y + 7$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$, dati il punto $P = (3, 2, 0)$ e il piano $\alpha \ : \ 2x + 3y - z + 2 = 0$, si determini:

- le coordinate della proiezione ortogonale di P sul piano α;

  Risposta $(1, -1, 1)$ **(pt.2G)**

- un'equazione cartesiana del piano passante per P e contenente la retta impropria di α.

  Risposta $2x + 3y - z - 12 = 0$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$, data la conica $\mathcal{C}_k \ : \ (k-2)x^2 + y^2 - (k-1)y = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino i valori di k per i quali:

- la conica $\mathcal{C}_k$ non ha punti doppi;

  Risposta $k \neq 1, 2$ **(pt.2G)**

- il punto $P = (1, 1)$ appartiene alla propria polare, nella polarità indotta da $\mathcal{C}_k$.

  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 8. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica di equazione $\mathcal{Q}_k \ : \ (k+3)x^2 + y^2 + kz^2 - 2yz + 2(k+3)x + 4 = 0$, con $k \in \mathbb{R}$. Si determini per quali k:

- la quadrica $\mathcal{Q}_k$ è riducibile;

  Risposta $k = 1$ **(pt.2G)**

- la quadrica $\mathcal{Q}_k$ è a punti parabolici.

  Risposta $k = -3$ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 3° appello - 27/3/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k-2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & k-2 & -2 \\ 0 & k-2 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$. $k = 2 : \infty^1$ soluzioni; $k \neq 2$: soluzione unica ______ **(pt.3A)**

- Si dica per quali valori reali di k la terna $(2, 0, 0)$ è soluzione del sistema.

  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ sia $A = ((0, 1, 2, -3), (1, -1, 3, 0), (2, -3, 4, 3))$. Se possibile, si completi A in modo da ottenere una base di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$. Nel caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta Non è possibile perché i vettori di A sono linearmente dipendenti. ______ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, dato il sottospazio $U = \{(0, 0, \alpha) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$, si determinino, se esistono:

- un sottospazio vettoriale W_1 di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ tale che $U \cup W_1$ sia un sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$;
- un sottospazio vettoriale W_2 di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ tale che $U \cup W_2$ non sia un sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$.

Risposta $W_1 = \{0\}$; $W_2 = \{(\beta, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \beta \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 4. In $M_3(\mathbb{R})$, data $A_k = \begin{pmatrix} k+4 & 0 & k+4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$, si determini:

- per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile;

  Risposta $k = -3$ ______ **(pt.2A)**

- posto $k = 3$, una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di A_3.

  Risposta $((1, 0, -1), (0, 1, 0), (7, 0, 1))$ ______ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{A}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione reale di una retta reale, se esiste, che appartenga al piano $\alpha \ : \ 4x - 3iy + iz + 8 = 0$.

Risposta $x + 2 = 0 = 3y - z$ ______ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$, dati il punto $P = (-4, -3, 1)$ e il piano $\alpha \ : \ 3x - y - z - 1 = 0$, si determini:

- le coordinate della proiezione ortogonale di P sul piano α;

  Risposta $(-1, -4, 0)$ ______ **(pt.2G)**

- un'equazione cartesiana del piano passante per P e contenente la retta impropria di α.

  Risposta $3x - y - z + 10 = 0$ ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$, data la conica $\mathcal{C}_k \ : \ (k+3)x^2 + y^2 - (k+4)y = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino i valori di k per i quali:

- la conica $\mathcal{C}_k$ non ha punti doppi;

  Risposta $k \neq -4, -3$ ______ **(pt.2G)**

- il punto $P = (0, 2)$ appartiene alla propria polare, nella polarità indotta da $\mathcal{C}_k$.

  Risposta $k = -2$ ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 8. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica di equazione $\mathcal{Q}_k \ : \ kx^2 + y^2 + (k-3)z^2 - 2yz + 2kx + 4 = 0$, con $k \in \mathbb{R}$. Si determini per quali k:

- la quadrica $\mathcal{Q}_k$ è riducibile;

  Risposta $k = 4$ ______ **(pt.2G)**

- la quadrica $\mathcal{Q}_k$ è a punti parabolici.

  Risposta $k = 0$ ______ **(pt.2G)**