UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 8/2/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ k+1 & 2 & -k-1 & 2k \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile.

  Risposta Compatibile per $k \neq 1$ con ∞^2 soluzioni **(pt.3A)**

Posto ora $k = 0$ si determini

- l'insieme S delle soluzioni del sistema $A_0 X = B_0$;

  Risposta $S = \mathcal{L}((1,0,1,0),(-2,1,0,1))$ **(pt.2A)**

- una base ortonormale B di $\mathcal{L}(S)$ rispetto al prodotto scalare euclideo:

  Risposta $B = ((1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0), (-1/2, 1/2, 1/2, 1/2))$ **(pt.2A)**

- le componenti del vettore $\mathbf{v} = (1,1,3,1)$ rispetto a B.

  Risposta $(2\sqrt{2}, 2)$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $M_6(\mathbb{R})$ sia U un sottospazio vettoriale di dimensione 20. Si determinino i valori massimo e minimo della dimensione di un sottospazio W affinché la somma $U + W$ possa essere diretta.

Risposta Min. 0, max 16 **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & k & 1 \\ 0 & -1 & k \end{pmatrix}$ risulta diagonalizzabile.

Risposta $\nexists\, k \in \mathbb{R}$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 4. Data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 0 & k+2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{v} = (1, 3, -3)$ risulta essere un autovettore di A_k, e per tali valori il corrispondente autovalore.

Risposta $k = 0, \quad \lambda = -2$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{A}_3(\mathbb{R})$ si determinino delle equazioni cartesiane della retta passante per l'origine e parallela ai piani $\alpha: \ x + 2y - z - 3 = 0$ e $\beta: \ 2x - y - z + 1 = 0$.

Risposta $x + 2y - z = 0 = 2x - y - z$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$, data la conica $\mathcal{C}_k \ : \ x^2 + 2ky^2 + 2(k-1)x + 1 = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è degenere e, per tali valori, le rette componenti;

  Risposta $k = 0$, $\quad x - 1 = 0$ contata 2 volte; $\quad k = 2, \quad x + 2iy + 1 = 0, \ x - 2iy + 1 = 0$ **(pt.3G)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è un'iperbole equilatera;

  Risposta $k = -1/2$ **(pt.1G)**

- un'equazione cartesiana del luogo dei centri delle coniche $\mathcal{C}_k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

  Risposta $y = 0$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determini il punto comune alle due rette $r: \ x + y - 1 = 0 = z$ ed $s: \ x + y = 0 = z + 1$

Risposta $[(1, -1, 0, 0)]$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 8. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica di equazione $\mathcal{Q}: \ x^2 - 4xz + 2x + 4z + 1 = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$ precisando la natura dei suoi punti semplici.

  Risposta Cilindro iperbolico; punti semplici parabolici **(pt.3G)**

- Si riconosca la conica $\mathcal{C}$ sezione di $\mathcal{Q}$ con il piano $\alpha: \ y - 1 = 0$.

  Risposta Iperbole **(pt.1G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 8/2/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2k+4 & -k-3 \\ 1 & -k-3 & 4k+8 & -1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 2k+6 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile.
  Risposta Compatibile per $k \neq -2$ con ∞^2 soluzioni **(pt.3A)**

Posto ora $k = -3$ si determini

- l'insieme S delle soluzioni del sistema $A_{-3}X = B_{-3}$;
  Risposta $S = \mathcal{L}((1,1,0,1),(0,-2,1,-4))$ **(pt.2A)**
- una base ortonormale B di $\mathcal{L}(S)$ rispetto al prodotto scalare euclideo:
  Risposta $B = ((1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 0, 1/\sqrt{3}), (2/3, 0, 1/3, -2/3))$ **(pt.2A)**
- le componenti del vettore $\mathbf{v} = (-2, 2, -2, 6)$ rispetto a B.
  Risposta $(2\sqrt{3}, -6)$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $M_7(\mathbb{R})$ sia U un sottospazio vettoriale di dimensione 10. Si determinino i valori massimo e minimo della dimensione di un sottospazio W affinché la somma $U + W$ possa essere diretta.
Risposta Min. 0, max 39 **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k \\ 0 & k & 2 \\ 0 & -2 & k \end{pmatrix}$ risulta diagonalizzabile.
Risposta $\nexists\, k \in \mathbb{R}$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 4. Data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 1 \\ 0 & k+3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{v} = (1, 5, 5)$ risulta essere un autovettore di A_k, e per tali valori il corrispondente autovalore.
Risposta $k = -1, \quad \lambda = 6$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{A}_3(\mathbb{R})$ si determinino delle equazioni cartesiane della retta passante per l'origine e parallela ai piani $\alpha: \ 2x + 3y - z - 3 = 0$ e $\beta: \ 3x - 2y - z + 1 = 0$.
Risposta $2x + 3y - z = 0 = 3x - 2y - z = 0$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$, data la conica $\mathcal{C}_k \ : \ 2(k-4)x^2 + y^2 + 2(k-5)y + 1 = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è degenere e, per tali valori, le rette componenti;
  Risposta $k = 4, \quad y - 1 = 0$ contata 2 volte; $\quad k = 6, \quad y \pm 2ix + 1 = 0$ **(pt.3G)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è un'iperbole equilatera;
  Risposta $k = 7/2$ **(pt.1G)**
- un'equazione cartesiana del luogo dei centri delle coniche $\mathcal{C}_k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.
  Risposta $x = 0$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determini il punto comune alle due rette $r: \ x = 0 = y + z - 1$ ed $s: \ x + 1 = 0 = y + z$
Risposta $[(0, 1, -1, 0)]$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 8. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica di equazione $\mathcal{Q}: \ x^2 + 4y^2 + 2x - 16y + 13 = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$ precisando la natura dei suoi punti semplici.
  Risposta Cilindro ellittico; punti semplici parabolici **(pt.3G)**
- Si riconosca la conica $\mathcal{C}$ sezione di $\mathcal{Q}$ con il piano $\alpha: \ z - 1 = 0$.
  Risposta Ellisse **(pt.1G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 8/2/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2k+2 & 1 & -1 & -k-2 \\ 4k+4 & 1 & -k-2 & -1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 2k+4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile.

  Risposta Compatibile per $k \neq -1$ con ∞^2 soluzioni **(pt.3A)**

Posto ora $k = -2$ si determini

- l'insieme S delle soluzioni del sistema $A_{-2}X = B_{-2}$;

  Risposta $S = \mathcal{L}((0,1,1,1),(1,0,-2,-4))$ **(pt.2A)**

- una base ortonormale B di $\mathcal{L}(S)$ rispetto al prodotto scalare euclideo:

  Risposta $B = ((0, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (1/3, 2/3, 0, -2/3))$ **(pt.2A)**

- le componenti del vettore $\mathbf{v} = (2,3,-1,-5)$ rispetto a B.

  Risposta $(-\sqrt{3}, 6)$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $M_6(\mathbb{R})$ sia U un sottospazio vettoriale di dimensione 21. Si determinino i valori massimo e minimo della dimensione di un sottospazio W affinché la somma $U + W$ possa essere diretta.
Risposta Min. 0, max 15 **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $A_k = \begin{pmatrix} -1 & 1 & k \\ 0 & k & 3 \\ 0 & -3 & k \end{pmatrix}$ risulta diagonalizzabile.
Risposta $\nexists\, k \in \mathbb{R}$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 4. Data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k-2 & 1 \\ 0 & k+1 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{v} = (1,6,6)$ risulta essere un autovettore di A_k, e per tali valori il corrispondente autovalore.
Risposta $k = 2, \quad \lambda = 7$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{A}_3(\mathbb{R})$ si determinino delle equazioni cartesiane della retta passante per l'origine e parallela ai piani $\alpha:\ 2x + y + z - 4 = 0$ e $\beta:\ x - 2y + z + 2 = 0$.
Risposta $2x + y + z = 0 = x - 2y + z$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$, data la conica $\mathcal{C}_k\ :\ 4x^2 + 2(k+5)y^2 + 4(k+4)x + 1 = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è degenere e, per tali valori, le rette componenti;

  Risposta $k = -5$, $2x - 1 = 0$ contata 2 volte; $k = -3$, $2x \pm 2iy + 1 = 0$ **(pt.3G)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è un'iperbole equilatera;

  Risposta $k = -7$ **(pt.1G)**

- un'equazione cartesiana del luogo dei centri delle coniche $\mathcal{C}_k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

  Risposta $y = 0$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determini il punto comune alle due rette $r:\ x - 3y - 1 = 0 = z$ ed $s:\ x - 3y = 0 = z + 1$
Risposta $[(3,1,0,0)]$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 8. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica di equazione $\mathcal{Q}:\ y^2 - 4yz + 2y + 4z + 1 = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$ precisando la natura dei suoi punti semplici.

  Risposta Cilindro iperbolico; punti semplici parabolici **(pt.3G)**

- Si riconosca la conica $\mathcal{C}$ sezione di $\mathcal{Q}$ con il piano $\alpha:\ x - 1 = 0$.

  Risposta Iperbole **(pt.1G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 8/2/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & k & -k & 2k-2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k-1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile.

  Risposta Compatibile per $k \neq 2$ con ∞^2 soluzioni **(pt.3A)**

Posto ora $k = 1$ si determini

- l'insieme S delle soluzioni del sistema $A_1 X = B_1$;

  Risposta $S = \mathcal{L}((0,1,1,0),(1,-2,0,1))$ **(pt.2A)**

- una base ortonormale B di $\mathcal{L}(S)$ rispetto al prodotto scalare euclideo:

  Risposta $B = ((0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (1/2, -1/2, 1/2, 1/2))$ **(pt.2A)**

- le componenti del vettore $\mathbf{v} = (2,1,5,2)$ rispetto a B.

  Risposta $(3\sqrt{2}, 4)$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $M_7(\mathbb{R})$ sia U un sottospazio vettoriale di dimensione 11. Si determinino i valori massimo e minimo della dimensione di un sottospazio W affinché la somma $U + W$ possa essere diretta.

Risposta Min. 0, max 38 **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & k & -1 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$ risulta diagonalizzabile.

Risposta $\nexists\, k \in \mathbb{R}$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 4. Data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k+3 & 1 \\ 0 & -k & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{v} = (1, 2, -2)$ risulta essere un autovettore di A_k, e per tali valori il corrispondente autovalore.

Risposta $k = -3, \quad \lambda = -1$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{A}_3(\mathbb{R})$ si determinino delle equazioni cartesiane della retta passante per l'origine e parallela ai piani $\alpha:\ 3x + y + z - 4 = 0$ e $\beta:\ x - 3y + z + 2 = 0$.

Risposta $3x + y + z = 0 = x - 3y + z$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$, data la conica $\mathcal{C}_k\ :\ 2(k+2)x^2 + 4y^2 + 4(k+1)y + 1 = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è degenere e, per tali valori, le rette componenti;

  Risposta $k = -2$, $2y - 1 = 0$ contata 2 volte; $k = 0$, $2y + 1 \pm 2ix = 0$ **(pt.3G)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è un'iperbole equilatera;

  Risposta $k = -4$ **(pt.1G)**

- un'equazione cartesiana del luogo dei centri delle coniche $\mathcal{C}_k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

  Risposta $x = 0$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determini il punto comune alle due rette $r:\ x = 0 = 2y + z - 1$ ed $s:\ x + 1 = 0 = 2y + z$

Risposta $[(0, -1, 2, 0)]$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 8. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica di equazione $\mathcal{Q}:\ 4x^2 + y^2 - 16x + 2y + 13 = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$ precisando la natura dei suoi punti semplici.

  Risposta Cilindro ellittico; punti semplici parabolici **(pt.3G)**

- Si riconosca la conica $\mathcal{C}$ sezione di $\mathcal{Q}$ con il piano $\alpha:\ z - 1 = 0$.

  Risposta Ellisse **(pt.1G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 8/2/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 2k-2 & -1 & -k \\ 1 & -4+4k & -k & -1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile.
  Risposta Compatibile per $k \neq 1$ con ∞^2 soluzioni **(pt.3A)**

Posto ora $k = 0$ si determini

- l'insieme S delle soluzioni del sistema $A_0 X = B_0$;
  Risposta $S = \mathcal{L}((1,0,1,1),(0,1,-2,-4))$ **(pt.2A)**
- una base ortonormale B di $\mathcal{L}(S)$ rispetto al prodotto scalare euclideo:
  Risposta $B = ((1/\sqrt{3}, 0, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (2/3, 1/3, 0, -2/3))$ **(pt.2A)**
- le componenti del vettore $\mathbf{v} = (3,1,1,-1)$ rispetto a B.
  Risposta $(\sqrt{3}, 3)$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $M_6(\mathbb{R})$ sia U un sottospazio vettoriale di dimensione 22. Si determinino i valori massimo e minimo della dimensione di un sottospazio W affinché la somma $U + W$ possa essere diretta.
Risposta Min. 0, max 14 **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $A_k = \begin{pmatrix} 3 & 1 & k \\ 0 & k & -3 \\ 0 & 3 & k \end{pmatrix}$ risulta diagonalizzabile.
Risposta $\nexists\, k \in \mathbb{R}$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 4. Data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k-5 & 1 \\ 0 & k & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{v} = (1,8,8)$ risulta essere un autovettore di A_k, e per tali valori il corrispondente autovalore.
Risposta $k = 5, \quad \lambda = 9$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{A}_3(\mathbb{R})$ si determinino delle equazioni cartesiane della retta passante per l'origine e parallela ai piani $\alpha :\ x - y + 3z + 5 = 0$ e $\beta :\ x + y - 2z - 1 = 0$.
Risposta $x - y + 3z = 0 = x + y - 2z$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$, data la conica $\mathcal{C}_k \ :\ x^2 + 2(k-2)y^2 + 2(3-k)x + 1 = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è degenere e, per tali valori, le rette componenti;
  Risposta $k = 2, \quad x + 1 = 0$ contata 2 volte; $\quad k = 4, \quad x - 1 \pm 2iy = 0$ **(pt.3G)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è un'iperbole equilatera;
  Risposta $k = 3/2$ **(pt.1G)**
- un'equazione cartesiana del luogo dei centri delle coniche $\mathcal{C}_k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.
  Risposta $y = 0$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determini il punto comune alle due rette $r :\ 3x - y - 1 = 0 = z$ ed $s :\ 3x - y = 0 = z + 1$
Risposta $[(1,3,0,0)]$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 8. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica di equazione $\mathcal{Q} :\ z^2 - 4xz + 4x + 2z + 1 = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$ precisando la natura dei suoi punti semplici.
  Risposta Cilindro iperbolico; punti semplici parabolici **(pt.3G)**
- Si riconosca la conica $\mathcal{C}$ sezione di $\mathcal{Q}$ con il piano $\alpha :\ y - 1 = 0$.
  Risposta Iperbole **(pt.1G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 8/2/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1-k & 2 & k-1 & 2k-4 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k-2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile.

  Risposta Compatibile per $k \neq 3$ con ∞^2 soluzioni **(pt.3A)**

Posto ora $k = 2$ si determini

- l'insieme S delle soluzioni del sistema $A_2 X = B_2$;

  Risposta $S = \mathcal{L}((1,0,1,0),(0,1,-2,1))$ **(pt.2A)**

- una base ortonormale B di $\mathcal{L}(S)$ rispetto al prodotto scalare euclideo:

  Risposta $B = ((1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0), (1/2, 1/2, -1/2, 1/2))$ **(pt.2A)**

- le componenti del vettore $\mathbf{v} = (-3,-1,-1,-1)$ rispetto a B.

  Risposta $(-2\sqrt{2}, -2)$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $M_7(\mathbb{R})$ sia U un sottospazio vettoriale di dimensione 12. Si determinino i valori massimo e minimo della dimensione di un sottospazio W affinché la somma $U + W$ possa essere diretta.

Risposta Min. 0, max 37 **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $A_k = \begin{pmatrix} -2 & 1 & k \\ 0 & k & -2 \\ 0 & 2 & k \end{pmatrix}$ risulta diagonalizzabile.

Risposta $\nexists\, k \in \mathbb{R}$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 4. Data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k-1 & 1 \\ 0 & -k & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{v} = (1,2,2)$ risulta essere un autovettore di A_k, e per tali valori il corrispondente autovalore.

Risposta $k = 1, \quad \lambda = 3$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{A}_3(\mathbb{R})$ si determinino delle equazioni cartesiane della retta passante per l'origine e parallela ai piani $\alpha:\ 2x - 2y + 3z + 5 = 0$ e $\beta:\ x + y - 2z - 1 = 0$.

Risposta $2x - 2y + 3z = 0 = x + y - 2z$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$, data la conica $\mathcal{C}_k\ :\ 2(k-1)x^2 + y^2 + 2(2-k)y + 1 = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è degenere e, per tali valori, le rette componenti;

  Risposta $k = 1, \quad y + 1 = 0$ contata 2 volte; $\quad k = 3, \quad y - 1 \pm 2ix = 0$ **(pt.3G)**

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è un'iperbole equilatera;

  Risposta $k = 1/2$ **(pt.1G)**

- un'equazione cartesiana del luogo dei centri delle coniche $\mathcal{C}_k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

  Risposta $x = 0$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determini il punto comune alle due rette $r:\ y + 2z - 1 = 0 = x$ ed $s:\ x + 1 = 0 = y + 2z$

Risposta $[(0,-2,1,0)]$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 8. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica di equazione $\mathcal{Q}:\ 4y^2 + z^2 - 16y + 2z + 13 = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$ precisando la natura dei suoi punti semplici.

  Risposta Cilindro ellittico; punti semplici parabolici **(pt.3G)**

- Si riconosca la conica $\mathcal{C}$ sezione di $\mathcal{Q}$ con il piano $\alpha:\ x - 1 = 0$.

  Risposta Ellisse **(pt.1G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 8/2/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 3-k & -1 & 2k-8 \\ 1 & -1 & 3-k & 4k-16 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 2k-6 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile.
  Risposta Compatibile per $k \neq 4$ con ∞^2 soluzioni **(pt.3A)**

Posto ora $k = 3$ si determini

- l'insieme S delle soluzioni del sistema $A_3 X = B_3$;
  Risposta $S = \mathcal{L}((1,1,1,0),(0,-4,-2,1))$ **(pt.2A)**
- una base ortonormale B di $\mathcal{L}(S)$ rispetto al prodotto scalare euclideo:
  Risposta $B = ((1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 0), (2/3, -2/3, 0, 1/3))$ **(pt.2A)**
- le componenti del vettore $\mathbf{v} = (-4, 0, -2, -1)$ rispetto a B.
  Risposta $(-2\sqrt{3}, -3)$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $M_6(\mathbb{R})$ sia U un sottospazio vettoriale di dimensione 23. Si determinino i valori massimo e minimo della dimensione di un sottospazio W affinché la somma $U + W$ possa essere diretta.
Risposta Min. 0, max 13 **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $A_k = \begin{pmatrix} -3 & 1 & k \\ 0 & k & -1 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$ risulta diagonalizzabile.
Risposta $\nexists\, k \in \mathbb{R}$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 4. Data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k+2 & 1 \\ 0 & k+1 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{v} = (1, 6, -6)$ risulta essere un autovettore di A_k, e per tali valori il corrispondente autovalore.
Risposta $k = -2, \quad \lambda = -5$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{A}_3(\mathbb{R})$ si determinino delle equazioni cartesiane della retta passante per l'origine e parallela ai piani $\alpha: \ 2x + y + z + 6 = 0$ e $\beta: \ x + 3y - z - 1 = 0$.
Risposta $2x + y + z = 0 = x + 3y - z$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$, data la conica $\mathcal{C}_k \ : \ 9x^2 + 2(k+3)y^2 + 6(k+2)x + 1 = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è degenere e, per tali valori, le rette componenti;
  Risposta $k = -3, \quad 3x - 1 = 0$ contata 2 volte; $\quad k = -1, \quad 3x + 1 \pm 2iy = 0$ **(pt.3G)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è un'iperbole equilatera;
  Risposta $k = -15/2$ **(pt.1G)**
- un'equazione cartesiana del luogo dei centri delle coniche $\mathcal{C}_k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.
  Risposta $y = 0$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determini il punto comune alle due rette $r: \ x + 2y - 1 = 0 = z$ ed $s: \ x + 2y = 0 = z + 1$
Risposta $[(2, -1, 0, 0)]$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 8. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica di equazione $\mathcal{Q}: \ x^2 - 4xy + 2x + 4y + 1 = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$ precisando la natura dei suoi punti semplici.
  Risposta Cilindro iperbolico; punti semplici parabolici **(pt.3G)**
- Si riconosca la conica $\mathcal{C}$ sezione di $\mathcal{Q}$ con il piano $\alpha: \ z - 1 = 0$.
  Risposta Iperbole **(pt.1G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 8/2/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2k+2 & 2 & -k-2 & k+2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k+1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile.
  Risposta Compatibile per $k \neq 0$ con ∞^2 soluzioni **(pt.3A)**

Posto ora $k = -1$ si determini

- l'insieme S delle soluzioni del sistema $A_{-1}X = B_{-1}$;
  Risposta $S = \mathcal{L}((0,0,1,1),(1,1,0,-2))$ **(pt.2A)**
- una base ortonormale B di $\mathcal{L}(S)$ rispetto al prodotto scalare euclideo:
  Risposta $B = ((0,0,1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}),(1/2,1/2,1/2,-1/2))$ **(pt.2A)**
- le componenti del vettore $\mathbf{v} = (-2,-2,-4,0)$ rispetto a B.
  Risposta $(-2\sqrt{2},-4)$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $M_7(\mathbb{R})$ sia U un sottospazio vettoriale di dimensione 13. Si determinino i valori massimo e minimo della dimensione di un sottospazio W affinché la somma $U + W$ possa essere diretta.
Risposta Min. 0, max 36 **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $A_k = \begin{pmatrix} -1 & 1 & k \\ 0 & k & -2 \\ 0 & 2 & k \end{pmatrix}$ risulta diagonalizzabile.
Risposta $\nexists\, k \in \mathbb{R}$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 4. Data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k+4 & 1 \\ 0 & k+5 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{v} = (1,4,-4)$ risulta essere un autovettore di A_k, e per tali valori il corrispondente autovalore.
Risposta $k = -4, \quad \lambda = -3$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{A}_3(\mathbb{R})$ si determinino delle equazioni cartesiane della retta passante per l'origine e parallela ai piani $\alpha:\ -2x+y-z+6=0$ e $\beta:\ x+3y+z+2=0$.
Risposta $-2x+y-z=0=x+3y+z$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$, data la conica $\mathcal{C}_k\ :\ 2(k+1)x^2+9y^2+6ky+1=0$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è degenere e, per tali valori, le rette componenti;
  Risposta $k=-1$, $3y-1=0$ contata 2 volte; $k=1$, $3y+1\pm 2ix=0$ **(pt.3G)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è un'iperbole equilatera;
  Risposta $k=-11/2$ **(pt.1G)**
- un'equazione cartesiana del luogo dei centri delle coniche $\mathcal{C}_k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.
  Risposta $x=0$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determini il punto comune alle due rette $r:\ 2x+y-1=0=z$ ed $s:\ 2x+y=0=z+1$
Risposta $[(1,-2,0,0)]$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 8. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica di equazione $\mathcal{Q}:\ x^2+4z^2+2x-16z+13=0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$ precisando la natura dei suoi punti semplici.
  Risposta Cilindro ellittico; punti semplici parabolici **(pt.3G)**
- Si riconosca la conica $\mathcal{C}$ sezione di $\mathcal{Q}$ con il piano $\alpha:\ y-1=0$.
  Risposta Ellisse **(pt.1G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 8/2/2018

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -1 & 2k-10 & 1 & 4-k \\ 4-k & 4k-20 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 2k-8 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile.

  Risposta Compatibile per $k \neq 5$ con ∞^2 soluzioni **(pt.3A)**

Posto ora $k = 4$ si determini

- l'insieme S delle soluzioni del sistema $A_4 X = B_4$;

  Risposta $S = \mathcal{L}((1,0,1,1),(-2,1,0,-4))$ **(pt.2A)**
- una base ortonormale B di $\mathcal{L}(S)$ rispetto al prodotto scalare euclideo:

  Risposta $B = ((1/\sqrt{3}, 0, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (0, 1/3, 2/3, -2/3))$ **(pt.2A)**
- le componenti del vettore $\mathbf{v} = (3,3,9,-3)$ rispetto a B.

  Risposta $(3\sqrt{3}, 9)$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. Nello spazio vettoriale $M_6(\mathbb{R})$ sia U un sottospazio vettoriale di dimensione 24. Si determinino i valori massimo e minimo della dimensione di un sottospazio W affinché la somma $U + W$ possa essere diretta.

Risposta Min. 0, max 12 **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $A_k = \begin{pmatrix} -2 & 1 & k \\ 0 & k & -4 \\ 0 & 4 & k \end{pmatrix}$ risulta diagonalizzabile.

Risposta $\nexists\, k \in \mathbb{R}$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 4. Data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k-4 & 1 \\ 0 & k-3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathbf{v} = (1,4,4)$ risulta essere un autovettore di A_k, e per tali valori il corrispondente autovalore.

Risposta $k = 4, \quad \lambda = 5$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{A}_3(\mathbb{R})$ si determinino delle equazioni cartesiane della retta passante per l'origine e parallela ai piani $\alpha: \ 4x + 3y - z + 3 = 0$ e $\beta: \ 3x - y + z + 2 = 0$.

Risposta $4x + 3y - z = 0 = 3x - y + z$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$, data la conica $\mathcal{C}_k \ : \ 4x^2 + 2(k-3)y^2 - 4(k-4)x + 1 = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è degenere e, per tali valori, le rette componenti;

  Risposta $k = 3, \quad 2x + 1 = 0$ contata 2 volte; $\quad k = 5, \quad 2x - 1 \pm 2iy = 0$ **(pt.3G)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui $\mathcal{C}_k$ è un'iperbole equilatera;

  Risposta $k = 1$ **(pt.1G)**
- un'equazione cartesiana del luogo dei centri delle coniche $\mathcal{C}_k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

  Risposta $y = 0$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si determini il punto comune alle due rette $r: \ x = 0 = 3y - z + 1$ ed $s: \ x + 1 = 0 = 3y - z$

Risposta $[(0,1,3,0)]$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 8. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica di equazione $\mathcal{Q}: \ 4x^2 - 8xz + 4x + 4z + 1 = 0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$ precisando la natura dei suoi punti semplici.

  Risposta Cilindro iperbolico; punti semplici parabolici **(pt.3G)**
- Si riconosca la conica $\mathcal{C}$ sezione di $\mathcal{Q}$ con il piano $\alpha: \ y - 1 = 0$.

  Risposta Iperbole **(pt.1G)**