UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 4^o Appello - 14.06.2011

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ siano dati il piano $\alpha : x+y=0$ e le rette $r : \begin{cases} x-2z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ e $s_k : \begin{cases} x+kz=0 \\ x+2y-kz=1 \end{cases}$.
Si determinino:

- le equazioni delle sfere di raggio $1/\sqrt{2}$, aventi centro sulla retta r e tangenti al piano α;
  Risposta: $\Sigma_1 : x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z+27/2=0$, $\Sigma_2 : x^2+y^2+z^2+4x-6y+2z+27/2=0$ **(pt.2)**
- il valore del parametro $k \in \mathbb{R}$ affinchè r e s_k siano complanari, determinando in tal caso l'equazione del piano che le contiene entrambe.
  Risposta: $k=-2$, $x-2z=0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema lineare:

$$\begin{cases} y=k \\ x+(k+1)z+t=0 \\ (2k-1)x-2ky+2z+kt=k-3 \end{cases}$$

Si discuta al variare di $k \in \mathbb{R}$ la risolubilità del sistema lineare, precisando il numero di soluzioni quando il sistema risulta compatibile.
Risposta: Compatibile $\forall k$; per $k=1$ esistono ∞^2 soluzioni, per $k \neq 1$ esistono ∞^1 soluzioni **(pt.4)**

Posto $k=-2$, si determinino:

- le soluzioni S del sistema;
  Risposta: $S = \{(-1,-2,t-1,t) \in \mathbb{R}^4 | \quad t \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2)**
- la dimensione e una base dello spazio vettoriale $\mathcal{L}(S)$ di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$;
  Risposta: $B = ((1,2,1,0),(0,0,1,1))$ e $dim(\mathcal{L}(S))=2$ **(pt.2)**
- la dimensione e una base del complemento ortogonale di $\mathcal{L}(S)$ rispetto al prodotto scalare euclideo.
  Risposta: $B' = ((-2,1,0,0),(1,0,-1,1))$ e $dim(\mathcal{L}(S)^{\perp})=2$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo sia dato

$$U = \left\{(\alpha,-\gamma,\gamma+\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^4(\mathbb{R}) | \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\right\}.$$

Si determinino:

- una base ortogonale B' di $\mathcal{L}(U)$ e le componenti c di $v=(2,-1,3,1)$ in B'.
  Risposta: $B' = ((1,0,0,0),(0,0,1,0),(0,-1,0,1))$, $c=(2,3,1)$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$, si consideri al variare del parametro reale k, la famiglia di coniche

$$\mathcal{C}_k : (k-1)x^2+2ky^2+2kxy+2ky=0$$

Si determinino i valori di k in $\mathbb{R}$ per i quali la conica $\mathcal{C}_k$ è generale, semplicemente degenere, doppiamente degenere.
Risposta: se $k \neq 0 \wedge k \neq 1$ la conica è generale, se $k=1$ la conica è semplicemente degenere, se $k=0$ la conica è doppiamente degenere. **(pt.2)**

Posto $k=2$ si riconosca la conica $\mathcal{C}_2$ e si determinino, quando esistono e sono reali, centro, asintoti e assi.
Risposta: Parabola, $C=[(2,-1,0)]$ (improprio); asse: $a : 5x+10y+4=0$. **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}_3(\mathbb{R})$, si consideri la quadrica $\mathcal{Q} : \ x^2-y^2+2z^2+2x+2yz+1=0$ e i piani $\alpha : \ x+y=0$ e $\beta : \ z=0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$;
  Risposta: Cono di vertice $V=[(-1,0,0,1)]$ **(pt.2)**
- si riconoscano le due coniche $\mathcal{C}_1 = \mathcal{Q} \cap \alpha$ e $\mathcal{C}_2 = \mathcal{Q} \cap \beta$.
  Risposta: $\mathcal{C}_1$: iperbole, $\mathcal{C}_2$: riducibile in rette reali e distinte **(pt.4)**

2

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 4^o Appello - 14.06.2011

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ siano dati il piano $\alpha : x+y=0$ e le rette $r : \begin{cases} x+2y=0 \\ z-2=0 \end{cases}$ e $s_k : \begin{cases} 2x+ky=0 \\ kx+z=0 \end{cases}$.

Si determinino:

- le equazioni delle sfere di raggio $1/\sqrt{2}$, aventi centro sulla retta r e tangenti al piano α;
  Risposta: $\Sigma_1 : x^2+y^2+z^2-4x+2y-4z+17/2=0,\qquad \Sigma_2 : x^2+y^2+z^2+4x-2y-4z+17/2=0$ **(pt.2)**
- il valore del parametro $k \in \mathbb{R}$ affinchè r e s_k siano complanari, determinando in tal caso l'equazione del piano che le contiene entrambe.
  Risposta: $k=4,\quad x+2y=0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si consideri il sistema lineare:

$$\begin{cases} (k+1)x+y+(k+1)z=k+3 \\ (2-2k)x+ky+2z+4t=k \\ x+t=0 \end{cases}$$

Si discuta al variare di $k \in \mathbb{R}$ la risolubilità del sistema lineare, precisando il numero di soluzioni quando il sistema risulta compatibile.
Risposta: Compatibile $\forall k$; per $k=-2$ esistono ∞^2 soluzioni, per $k \neq -2$ esistono ∞^1 soluzioni **(pt.4)**

Posto $k=1$, si determinino:

- le soluzioni S del sistema;
  Risposta: $S = \{(1/2, \alpha, (3-\alpha)/2, -1/2) \in \mathbb{R}^4 |\quad \alpha \in \mathbb{R}\ \}$ **(pt.2)**
- la dimensione e una base dello spazio vettoriale $\mathcal{L}(S)$ di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$;
  Risposta: $B = ((1,0,3,-1),(0,2,-1,0))$ e $dim(\mathcal{L}(S)) = 2$ **(pt.2)**
- la dimensione e una base del complemento ortogonale di $\mathcal{L}(S)$ rispetto al prodotto scalare euclideo.
  Risposta: $B' = ((-6,1,2,0),(1,0,0,1))$ e $dim(\mathcal{L}(S)^{\perp}) = 2$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo sia dato

$$U = \left\{(\alpha, \alpha+\gamma, \beta, \beta+\gamma) \in \mathbb{R}^4(\mathbb{R}) | \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}.$$

Si determinino:

- una base ortogonale B' di $\mathcal{L}(U)$ e le componenti c di $v=(1,1,2,2)$ in B'.
  Risposta: $B' = ((1,1,0,0),(0,0,1,1),(-1/2,1/2,-1/2,1/2))$, $c=(1,2,0)$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$, si consideri al variare del parametro reale k, la famiglia di coniche

$$\mathcal{C}_k : kx^2+(k+2)y^2+4kxy+2kx=0$$

Si determinino i valori di k in $\mathbb{R}$ per i quali la conica $\mathcal{C}_k$ è generale, semplicemente degenere, doppiamente degenere.
Risposta: se $k \neq 0 \wedge k \neq -2$ la conica è generale, se $k=-2$ la conica è semplicemente degenere, se $k=0$ la conica è doppiamente degenere. **(pt.2)**

Posto $k=2/3$ si riconosca la conica $\mathcal{C}_{2/3}$ e si determinino, quando esistono e sono reali, centro, asintoti e assi.
Risposta: Parabola, $C=[(2,-1,0)]$ (improprio); asse: $a : 5x+10y+1=0$. **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}_3(\mathbb{R})$, si consideri la quadrica $\mathcal{Q} :\ x^2+2y^2-z^2+2x+2yz+1=0$ e i piani $\alpha :\ y=0$ e $\beta :\ z+1=0$.

- Si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}$;
  Risposta: Cono di vertice $V=[(-1,0,0,1)]$ **(pt.2)**
- si riconoscano le due coniche $\mathcal{C}_1 = \mathcal{Q} \cap \alpha$ e $\mathcal{C}_2 = \mathcal{Q} \cap \beta$.
  Risposta: $\mathcal{C}_1$: riducibile in rette reali e distinte, $\mathcal{C}_2$: ellisse **(pt.4)**