UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II appello - 03.02.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema lineare:

$$\begin{cases} kx - z = 0 \\ x + (k-1)y - z = 0 \\ -y - 3z = -1 \\ (k-1)x + 2(k-1)z = -1 \end{cases}$$

- Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ si determinino i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta Il sistema è incompatibile $\forall k \neq -1$ e 0. Per $k = 0$ e $k = -1$ esiste un'unica soluzione. **(pt.2)**
- Posto $k = -1$ si determinino le soluzioni del sistema.
  Risposta $x = -\frac{1}{2}$; $y = -\frac{1}{2}$; $z = \frac{1}{2}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Si determinino gli autovalori di A e, per ciascuno di essi, la molteplicità algebrica e geometrica e il relativo autospazio.
  Risposta $\lambda_1 = 1$ con $a(\lambda_1) = g(\lambda_1) = 2$, $V_1 = \{(k, -2h, h) \in \mathbb{R}^3 |\ k, h \in \mathbb{R}\}$,
  $\lambda_2 = 2$ con $a(\lambda_2) = g(\lambda_2) = 1$, $V_2 = \{(2t, t, -t) \in \mathbb{R}^3 |\ t \in \mathbb{R}\}$. **(pt.3)**
- Si trovino una matrice diagonale simile ad A e la relativa matrice diagonalizzante.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati i piani $\alpha : y = x$ e $\beta : z = -1$ e le rette $r : \begin{cases} y = 1 \\ z = x - 1 \end{cases}$ e $s_k : \begin{cases} 2x + z = 0 \\ x + kz = 1 \end{cases}$.

Detto F il fascio di piani generato da α e β, si determinino:

- l'equazione del piano π appartenente ad F e parallelo alla retta r;
  Risposta $y - x + z = -1$ **(pt.3)**
- il valore del parametro $k \in \mathbb{R}$ affinchè r e s_k siano complanari, determinando in tal caso l'equazione del piano γ che le contiene entrambe.
  Risposta $k = -1$, $z = x - 1$ **(pt.3)**
- Posto $k = 0$ trovare la retta t di minima distanza tra r e s_0.
  Risposta $\begin{cases} y = 1 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Siano dati in $E_3(\mathbb{R})$ la quadrica $Q : xy + xz + yz - 2y + 4z = 0$ e i piani $\alpha : x = 0$ e $\beta : y = 0$.

- Si riconosca la quadrica Q.
  Risposta Iperboloide **(pt.2)**
- Si stabilisca la natura dei punti di Q.
  Risposta Iperboloide a punti iperbolici **(pt.5)**
- Le coniche $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ ottenute sezionando Q rispettivamente con i piani α e β, sono una riducibile e l'altra irriducibile.
  Si dica qual è la riducibile e se ne determinino le rette componenti.
  Si dica di quale conica si tratta la sezione irriducibile motivando la risposta.

  Risposta $Q \cap \alpha$ è una iperbole, $Q \cap \beta$ è riducibile nelle rette $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ x + 4 = 0 \end{cases}$ **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II appello - 03.02.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema lineare:

$$\begin{cases} -x+(2k-1)z=-1 \\ x+(k-1)y-z=0 \\ (k-1)x+(1-k)y=0 \\ -y-3z=-1 \end{cases}$$

- Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ si determinino i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta Il sistema è incompatibile $\forall k \neq -1$ e 0. Per $k=0$ e $k=-1$ esiste un'unica soluzione. **(pt.2)**
- Posto $k=-1$ si determinino le soluzioni del sistema.
  Risposta $x=-\frac{1}{2}$; $y=-\frac{1}{2}$; $z=\frac{1}{2}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Si determinino gli autovalori di A e, per ciascuno di essi, la molteplicità algebrica e geometrica e il relativo autospazio.
  Risposta $\lambda_1=1$ con $a(\lambda_1)=g(\lambda_1)=1$, $V_1=\{(-2t,0,t)\in\mathbb{R}^3|\ t\in\mathbb{R}\}$,
  $\lambda_2=-2$ con $a(\lambda_2)=g(\lambda_2)=1$, $V_{-2}=\{(-5k,15k,k)\in\mathbb{R}^3|\ k\in\mathbb{R}\}$
  $\lambda_3=3$ con $a(\lambda_3)=g(\lambda_3)=1$, $V_3=\{(0,0,h)\in\mathbb{R}^3|\ h\in\mathbb{R}\}$ **(pt.3)**
- Si trovino una matrice diagonale simile ad A e la relativa matrice diagonalizzante.
  Risposta $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $P=\begin{pmatrix} -2 & -5 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati i piani $\alpha: y=x$ e $\beta: z=-1$ e le rette $r:\begin{cases} y=1 \\ z=x-1 \end{cases}$ e $s_k:\begin{cases} 2x+z=0 \\ x+kz=1 \end{cases}$.
Detto F il fascio di piani generato da α e β, si determinino:

- l'equazione del piano π appartenente ad F e parallelo alla retta r;
  Risposta $y-x+z=-1$ **(pt.3)**
- il valore del parametro $k\in\mathbb{R}$ affinchè r e s_k siano complanari, determinando in tal caso l'equazione del piano γ che le contiene entrambe.
  Risposta $k=-1$, $z=x-1$ **(pt.3)**
- Posto $k=0$ trovare la retta t di minima distanza tra r e s_0.
  Risposta $\begin{cases} y=1 \\ x+z+1=0 \end{cases}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Siano dati in $E_3(\mathbb{R})$ la quadrica $Q: 5xy-2xz-6yz+y=0$ e i piani $\alpha: x=0$ e $\beta: x=1$.

- Si riconosca la quadrica Q.
  Risposta Iperboloide **(pt.2)**
- Si stabilisca la natura dei punti di Q.
  Risposta Iperboloide a punti iperbolici **(pt.5)**
- Le coniche $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ ottenute sezionando Q rispettivamente con i piani α e β, sono una riducibile e l'altra irriducibile.
  Si dica qual è la riducibile e se ne determinino le rette componenti.
  Si dica di quale conica si tratta la sezione irriducibile motivando la risposta.
  Risposta $Q\cap\alpha$ è riducibile nelle rette $\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 1-6z=0 \\ x=0 \end{cases}$, $Q\cap\beta$ è una iperbole **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II appello - 03.02.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema lineare:

$$\begin{cases} (k+1)x + (k-1)y - 2z = 0 \\ (k-1)x + y + (2k+1)z = 0 \\ kx - z = 0 \\ -x + (2k-1)z = -1 \end{cases}$$

- Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ si determinino i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta Il sistema è incompatibile $\forall k \neq -1$ e 0. Per $k = 0$ e $k = -1$ esiste un'unica soluzione. **(pt.2)**
- Posto $k = -1$ si determinino le soluzioni del sistema.
  Risposta $x = -\frac{1}{2}$; $y = -\frac{1}{2}$; $z = \frac{1}{2}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Si determinino gli autovalori di A e, per ciascuno di essi, la molteplicità algebrica e geometrica e il relativo autospazio.
  Risposta $\lambda_1 = 1$ con $a(\lambda_1) = g(\lambda_1) = 1$, $V_1 = \{(-2t, -6t, t) \in \mathbb{R}^3 |\ t \in \mathbb{R}\}$,
  $\lambda_2 = -2$ con $a(\lambda_2) = g(\lambda_2) = 1$, $V_{-2} = \{(-5k, 0, k) \in \mathbb{R}^3 |\ k \in \mathbb{R}\}$
  $\lambda_2 = 3$ con $a(\lambda_3) = g(\lambda_3) = 1$, $V_3 = \{(0, 0, h) \in \mathbb{R}^3 |\ h \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**
- Si trovino una matrice diagonale simile ad A e la relativa matrice diagonalizzante.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati i piani $\alpha : y = x$ e $\beta : z = -1$ e le rette $r : \begin{cases} y = 1 \\ z = x - 1 \end{cases}$ e $s_k : \begin{cases} 2x + z = 0 \\ x + kz = 1 \end{cases}$.
Detto F il fascio di piani generato da α e β, si determinino:

- l'equazione del piano π appartenente ad F e parallelo alla retta r;
  Risposta $y - x + z = -1$ **(pt.3)**
- il valore del parametro $k \in \mathbb{R}$ affinchè r e s_k siano complanari, determinando in tal caso l'equazione del piano γ che le contiene entrambe.
  Risposta $k = -1$, $z = x - 1$ **(pt.3)**
- Posto $k = 0$ trovare la retta t di minima distanza tra r e s_0.
  Risposta $\begin{cases} y = 1 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Siano dati in $E_3(\mathbb{R})$ la quadrica $Q : x^2 - y^2 + z^2 + 2xy - 2x = 0$ e i piani $\alpha : x = 0$ e $\beta : x = 2$.

- Si riconosca la quadrica Q.
  Risposta Iperboloide **(pt.2)**
- Si stabilisca la natura dei punti di Q.
  Risposta Iperboloide a punti iperbolici **(pt.5)**
- Le coniche $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ ottenute sezionando Q rispettivamente con i piani α e β, sono una riducibile e l'altra irriducibile.
  Si dica qual è la riducibile e se ne determinino le rette componenti.
  Si dica di quale conica si tratta la sezione irriducibile motivando la risposta.
  Risposta $Q \cap \alpha$ è riducibile nelle rette $\begin{cases} z - y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} z + y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$, $Q \cap \beta$ è una iperbole **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II appello - 03.02.10

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema lineare:

$$\begin{cases} kx - z = 0 \\ x + (k-1)y - z = 0 \\ x + ky + 2z = 1 \\ kx + ky + 2kz = 0 \end{cases}$$

- Al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ si determinino i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta Il sistema è incompatibile $\forall k \neq -1$ e 0. Per $k = 0$ e $k = -1$ esiste un'unica soluzione. **(pt.2)**
- Posto $k = -1$ si determinino le soluzioni del sistema.
  Risposta $x = -\frac{1}{2}$; $y = -\frac{1}{2}$; $z = \frac{1}{2}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Si determinino gli autovalori di A e, per ciascuno di essi, la molteplicità algebrica e geometrica e il relativo autospazio.
  Risposta $\lambda_1 = 1$ con $a(\lambda_1) = g(\lambda_1) = 2$, $V_1 = \{(-h, k, h) \in \mathbb{R}^3 | \ k, h \in \mathbb{R}\}$,
  $\lambda_2 = 5$ con $a(\lambda_2) = g(\lambda_2) = 1$, $V_5 = \{(t, 0, t) \in \mathbb{R}^3 | \ t \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**
- Si trovino una matrice diagonale simile ad A e la relativa matrice diagonalizzante.

  Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$ sono dati i piani $\alpha : y = x$ e $\beta : z = -1$ e le rette $r : \begin{cases} y = 1 \\ z = x - 1 \end{cases}$ e $s_k : \begin{cases} 2x + z = 0 \\ x + kz = 1 \end{cases}$.

Detto F il fascio di piani generato da α e β, si determinino:

- l'equazione del piano π appartenente ad F e parallelo alla retta r;
  Risposta $y - x + z = -1$ **(pt.3)**
- il valore del parametro $k \in \mathbb{R}$ affinchè r e s_k siano complanari, determinando in tal caso l'equazione del piano γ che le contiene entrambe.
  Risposta $k = -1$, $z = x - 1$ **(pt.3)**
- Posto $k = 0$ trovare la retta t di minima distanza tra r e s_0.
  Risposta $\begin{cases} y = 1 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. Siano dati in $E_3(\mathbb{R})$ la quadrica $Q : xy + xz + yz - 2y + 4z = 0$ e i piani $\alpha : x = 0$ e $\beta : y = 0$.

- Si riconosca la quadrica Q.
  Risposta Iperboloide **(pt.2)**
- Si stabilisca la natura dei punti di Q.
  Risposta Iperboloide a punti iperbolici **(pt.5)**
- Le coniche $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ ottenute sezionando Q rispettivamente con i piani α e β, sono una riducibile e l'altra irriducibile.
  Si dica qual è la riducibile e se ne determinino le rette componenti.
  Si dica di quale conica si tratta la sezione irriducibile motivando la risposta.

  Risposta $Q \cap \alpha$ è una iperbole, $Q \cap \beta$ è riducibile nelle rette $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 0 \\ x + 4 = 0 \end{cases}$ **(pt.4)**