UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 7 aprile 2009

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ sono dati i sottospazi

$$U = \{(a+b, 3a, a+b, 3a) \in \mathbb{R}^4, a, b \in \mathbb{R}\} \qquad W = \mathcal{L}(((0,3,0,k),(0,k,0,3))).$$

Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si determinino le dimensioni di U, W, $U+W$ e si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la somma $U+W$ è diretta.

Risposta $k \neq \pm 3$ $dim\ U = 2;\ dim\ W = 2;\ dim(U+W) = 3;$
$k = 3$ $dim\ U = 2;\ dim\ W = 1;\ dim(U+W) = 2;$
$k = -3$ $dim\ U = 2;\ dim\ W = 1;\ dim(U+W) = 3.$ La somma è diretta per $k = -3$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. Data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 3 & k & 2 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & k & 0 \end{pmatrix}$

- Si determini, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda = 3$.
  Risposta per $k \neq 3$ $m_a(3) = 1$; per $k = 3$ $m_a(3) = 2$ ______ **(pt.3)**
- Posto $k = 0$ si determinino la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 0$ e il relativo autospazio.
  Risposta $m_g(0) = 2$; $V_0 = \{(2a, b, -3a) | a, b \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.3)**
- Posto $k = 1$ si determini, se possibile, una matrice diagonale simile ad A_1 e la relativa matrice diagonalizzante.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono date le rette $r : \begin{cases} y = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}$ $s : \begin{cases} y = 2 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$ e $t : \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$.

- Si determini, se possibile, un'equazione cartesiana del piano contenente la retta r e l'asse delle ordinate.
  Risposta $x - z = 0$ ______ **(pt.2)**
- Si determini una rappresentazione cartesiana della retta di minima distanza tra r ed s.
  Risposta $x - z = 2x + z - 1 = 0$ ______ **(pt.4)**
- Si determini un'equazione cartesiana della superficie Σ generata dalla rotazione di r attorno alla retta t.
  Risposta $x^2 - y^2 - z^2 + 2y - 1 = 0$ ______ **(pt.4)**
- Si riconosca la superficie Σ ottenuta e, se ammette punti doppi, se ne determinino le coordinate.
  Risposta Cono di vertice $V = (0, 1, 0)$ ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $\mathcal{C} : x^2 + 4y^2 + 4xy - 6x - 8y + 5 = 0$ e se ne determinino, se esistono, centro e assi.

Risposta Parabola di centro $C_\infty = [(2, -1, 0)]$ ed asse $5x + 10y - 11 = 0$ ______ **(pt.3)**

Si determini inoltre un'equazione cartesiana della retta tangente alla conica data nel punto $P = (1, 0)$.

Risposta $x + y - 1 = 0$ ______ **(pt.2)**

2

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 7 aprile 2009

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ sono dati i sottospazi

$$U = \{(a+b, a+b, -5a, -5a) \in \mathbb{R}^4, a, b \in \mathbb{R}\} \qquad W = \mathcal{L}(((0,0,5,k),(0,0,k,5))).$$

Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si determinino le dimensioni di U, W, $U+W$ e si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la somma $U+W$ è diretta.

Risposta $k \neq \pm 5$ $dim\ U = 2;\ dim\ W = 2;\ dim(U+W) = 3;$
$k = 5$ $dim\ U = 2;\ dim\ W = 1;\ dim(U+W) = 2;$
$k = -5$ $dim\ U = 2;\ dim\ W = 1;\ dim(U+W) = 3.$ La somma è diretta per $k = -5$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. Data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 0 & k & 3 \\ 0 & k & k \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- Si determini, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda = 2$.
  Risposta per $k \neq 2$ $m_a(2) = 1$; per $k = 2$ $m_a(2) = 2$ ______ **(pt.3)**
- Posto $k = 0$ si determinino la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 0$ e il relativo autospazio.
  Risposta $m_g(0) = 2$; $V_0 = \{(a,b,0) | a, b \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.3)**
- Posto $k = -2$ si determini, se possibile, una matrice diagonale simile ad A_{-2} e la relativa matrice diagonalizzante.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono date le rette $r: \begin{cases} x = -1 \\ y + z = 0 \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = 1 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$ e $t: \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$.

- Si determini, se possibile, un'equazione cartesiana del piano contenente la retta r e l'asse delle ascisse.
  Risposta $y + z = 0$ ______ **(pt.2)**
- Si determini una rappresentazione cartesiana della retta di minima distanza tra r ed s.
  Risposta $y + z = y + 2z - 1 = 0$ ______ **(pt.4)**
- Si determini un'equazione cartesiana della superficie Σ generata dalla rotazione di r attorno alla retta t.
  Risposta $x^2 + y^2 - z^2 + 2x + 1 = 0$ ______ **(pt.4)**
- Si riconosca la superficie Σ ottenuta e, se ammette punti doppi, se ne determinino le coordinate.
  Risposta Cono di vertice $V = (-1, 0, 0)$ ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $\mathcal{C}: 4x^2 + y^2 + 4xy - 8x - 6y + 5 = 0$ e se ne determinino, se esistono, centro e assi.

Risposta Parabola di centro $C_\infty = [(1, -2, 0)]$ ed asse $10x + 5y - 11 = 0$ ______ **(pt.3)**

Si determini inoltre un'equazione cartesiana della retta tangente alla conica data nel punto $P = (0, 1)$.

Risposta $x + y - 1 = 0$ ______ **(pt.2)**

3

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 7 aprile 2009

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ sono dati i sottospazi

$$U = \{(2a, 2a, a+b, a+b) \in \mathbb{R}^4, a, b \in \mathbb{R}\} \qquad W = \mathcal{L}(((2, k, 0, 0), (k, 2, 0, 0))).$$

Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si determinino le dimensioni di U, W, $U+W$ e si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la somma $U+W$ è diretta.

Risposta $k \neq \pm 2$ $dim\ U = 2;\ dim\ W = 2;\ dim(U+W) = 3;$

$k = 2$ $\quad dim\ U = 2;\ dim\ W = 1;\ dim(U+W) = 2;$

$k = -2$ $dim\ U = 2;\ dim\ W = 1;\ dim(U+W) = 3.$ La somma è diretta per $k = -2$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. Data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & k & k \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Si determini, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda = 1$.
  Risposta per $k \neq 1$ $m_a(1) = 1$; per $k = 1$ $m_a(1) = 2$ **(pt.3)**
- Posto $k = 0$ si determinino la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 0$ e il relativo autospazio.
  Risposta $m_g(0) = 2$; $V_0 = \{(0, a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**
- Posto $k = 2$ si determini, se possibile, una matrice diagonale simile ad A_2 e la relativa matrice diagonalizzante.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono date le rette $r : \begin{cases} z = 2 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ $s : \begin{cases} z = 0 \\ x - y = -1 \end{cases}$ e $t : \begin{cases} y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$.

- Si determini, se possibile, un'equazione cartesiana del piano contenente la retta r e l'asse delle quote.
  Risposta $2x + y = 0$ **(pt.2)**
- Si determini una rappresentazione cartesiana della retta di minima distanza tra r ed s.
  Risposta $2x + y = x - y + 1 = 0$ **(pt.4)**
- Si determini un'equazione cartesiana della superficie Σ generata dalla rotazione di r attorno alla retta t.
  Risposta $4x^2 - y^2 - z^2 + +4z - 4 = 0$ **(pt.4)**
- Si riconosca la superficie Σ ottenuta e, se ammette punti doppi, se ne determinino le coordinate.
  Risposta Cono di vertice $V = (0, 0, 2)$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $\mathcal{C} : 9x^2 + y^2 + 6xy - 2x - 4y + 3 = 0$ e se ne determinino, se esistono, centro e assi.

Risposta Parabola di centro $C_\infty = [(1, -3, 0)]$ ed asse $6x + 2y - 1 = 0$ **(pt.3)**

Si determini inoltre un'equazione cartesiana della retta tangente alla conica data nel punto $P = (0, 1)$.

Risposta $2x - y + 1 = 0$ **(pt.2)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 7 aprile 2009

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ sono dati i sottospazi

$$U = \{(a+b, a+b, -7a, -7a) \in \mathbb{R}^4, a, b \in \mathbb{R}\} \qquad W = \mathcal{L}(((0,0,-7,k),(0,0,k,-7))).$$

Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si determinino le dimensioni di U, W, $U+W$ e si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la somma $U+W$ è diretta.
Risposta $k \neq \pm 7$ $dim\ U = 2;\ dim\ W = 2;\ dim(U+W) = 3;$
$k = -7$ $\ dim\ U = 2;\ dim\ W = 1;\ dim(U+W) = 2;$
$k = 7$ $dim\ U = 2;\ dim\ W = 1;\ dim(U+W) = 3.$ La somma è diretta per $k = 7$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. Data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & k & k \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- Si determini, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda = 0$.
  Risposta per $k \neq 0$ $m_a(0) = 1$; per $k = 0$ $m_a(0) = 2$ **(pt.3)**
- Posto $k = 0$ si determinino la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 0$ e il relativo autospazio.
  Risposta $m_g(0) = 2;\ V_0 = \{(a, b, -3a) | a, b \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**
- Posto $k = -1$ si determini, se possibile, una matrice diagonale simile ad A_{-1} e la relativa matrice diagonalizzante.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono date le rette $r : \begin{cases} z = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$ $s : \begin{cases} z = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ e $t : \begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$.

- Si determini, se possibile, un'equazione cartesiana del piano contenente la retta r e l'asse delle quote.
  Risposta $x - y = 0$ **(pt.2)**
- Si determini una rappresentazione cartesiana della retta di minima distanza tra r ed s.
  Risposta $x - y = x + 2y - 1 = 0$ **(pt.4)**
- Si determini un'equazione cartesiana della superficie Σ generata dalla rotazione di r attorno alla retta t.
  Risposta $x^2 - y^2 - z^2 + 2z - 1 = 0$ **(pt.4)**
- Si riconosca la superficie Σ ottenuta e, se ammette punti doppi, se ne determinino le coordinate.
  Risposta Cono di vertice $V = (0, 0, 1)$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $\mathcal{C} : 2x^2 + 2y^2 + 4xy - 5x - 6y + 3 = 0$ e se ne determinino, se esistono, centro e assi.
Risposta Parabola di centro $C_\infty = [(1, -1, 0)]$ ed asse $8x + 8y - 11 = 0$ **(pt.3)**
Si determini inoltre un'equazione cartesiana della retta tangente alla conica data nel punto $P = (1, 0)$.
Risposta $x + 2y - 1 = 0$ **(pt.2)**

5

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 7 aprile 2009

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ sono dati i sottospazi

$$U = \{(a+b, -6a, a+b, -6a) \in \mathbb{R}^4, a, b \in \mathbb{R}\} \qquad W = \mathcal{L}(((0,k,0,6),(0,6,0,k))).$$

Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si determinino le dimensioni di U, W, $U+W$ e si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la somma $U+W$ è diretta.
Risposta $k \neq \pm 6$ $dim\ U = 2;\ dim\ W = 2;\ dim(U+W) = 3;$
$k = 6$ $dim\ U = 2;\ dim\ W = 1;\ dim(U+W) = 2;$
$k = -6$ $dim\ U = 2;\ dim\ W = 1;\ dim(U+W) = 3.$ La somma è diretta per $k = -6$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. Data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & k & -2 \end{pmatrix}$

- Si determini, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda = -2$.
  Risposta per $k \neq -2$ $m_a(-2) = 1$; per $k = -2$ $m_a(-2) = 2$ **(pt.3)**
- Posto $k = 0$ si determinino la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 0$ e il relativo autospazio.
  Risposta $m_g(0) = 2$; $V_0 = \{(2a, b, a) | a, b \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**
- Posto $k = 1$ si determini, se possibile, una matrice diagonale simile ad A_1 e la relativa matrice diagonalizzante.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono date le rette $r : \begin{cases} y = -1 \\ x + z = 0 \end{cases}$ $s : \begin{cases} y = 1 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$ e $t : \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$.

- Si determini, se possibile, un'equazione cartesiana del piano contenente la retta r e l'asse delle ordinate.
  Risposta $x + z = 0$ **(pt.2)**
- Si determini una rappresentazione cartesiana della retta di minima distanza tra r ed s.
  Risposta $x + z = 2x + z - 1 = 0$ **(pt.4)**
- Si determini un'equazione cartesiana della superficie Σ generata dalla rotazione di r attorno alla retta t.
  Risposta $x^2 + y^2 - z^2 + 2y + 1 = 0$ **(pt.4)**
- Si riconosca la superficie Σ ottenuta e, se ammette punti doppi, se ne determinino le coordinate.
  Risposta Cono di vertice $V = (0, -1, 0)$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $\mathcal{C} : 2x^2 + 2y^2 - 4xy + 5x + 6y - 3 = 0$ e se ne determinino, se esistono, centro e assi.
Risposta Parabola di centro $C_\infty = [(1, 1, 0)]$ ed asse $8x - 8y - 1 = 0$ **(pt.3)**
Si determini inoltre un'equazione cartesiana della retta tangente alla conica data nel punto $P = (-3, 0)$.
Risposta $7x - 18y + 21 = 0$ **(pt.2)**

6

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 7 aprile 2009

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ sono dati i sottospazi

$$U = \{(a+b, 4a, a+b, 4a) \in \mathbb{R}^4, a, b \in \mathbb{R}\} \qquad W = \mathcal{L}(((0,k,0,-4),(0,-4,0,k))).$$

Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si determinino le dimensioni di U, W, $U+W$ e si dica per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la somma $U+W$ è diretta.

Risposta $k \neq \pm 4$ $dim\ U = 2;\ dim\ W = 2;\ dim(U+W) = 3;$
$k = -4$ $\ dim\ U = 2;\ dim\ W = 1;\ dim(U+W) = 2;$
$k = 4$ $dim\ U = 2;\ dim\ W = 1;\ dim(U+W) = 3.$ La somma è diretta per $k = 4$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 2. Data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 0 & k & 0 \\ k & 1 & 5 \end{pmatrix}$

- Si determini, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda = 5$.
  Risposta per $k \neq 5$ $m_a(5) = 1$; per $k = 5$ $m_a(5) = 2$ **(pt.3)**
- Posto $k = 0$ si determinino la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 0$ e il relativo autospazio.
  Risposta $m_g(0) = 2$; $V_0 = \{(a, -5b, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**
- Posto $k = 2$ si determini, se possibile, una matrice diagonale simile ad A_2 e la relativa matrice diagonalizzante.
  Risposta $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono date le rette $r : \begin{cases} x = 2 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$ $s : \begin{cases} x = 0 \\ y - z = -1 \end{cases}$ e $t : \begin{cases} x = 2 \\ z = 0 \end{cases}$.

- Si determini, se possibile, un'equazione cartesiana del piano contenente la retta r e l'asse delle ascisse.
  Risposta $2y + z = 0$ **(pt.2)**
- Si determini una rappresentazione cartesiana della retta di minima distanza tra r ed s.
  Risposta $2y + z = y - z + 1 = 0$ **(pt.4)**
- Si determini un'equazione cartesiana della superficie Σ generata dalla rotazione di r attorno alla retta t.
  Risposta $x^2 - 4y^2 + z^2 - 4x + 4 = 0$ **(pt.4)**
- Si riconosca la superficie Σ ottenuta e, se ammette punti doppi, se ne determinino le coordinate.
  Risposta Cono di vertice $V = (2, 0, 0)$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $\mathcal{C} : 4x^2 + y^2 - 4xy + 8x + 6y - 5 = 0$ e se ne determinino, se esistono, centro e assi.

Risposta Parabola di centro $C_\infty = [(1, 2, 0)]$ ed asse $2x - y + 1 = 0$ **(pt.3)**

Si determini inoltre un'equazione cartesiana della retta tangente alla conica data nel punto $P = (1/2, 0)$.

Risposta $6x + 2y - 3 = 0$ **(pt.2)**