1

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II appello - 27.01.09

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri, al variare del parametro reale k, il sottospazio $V_k = \mathcal{L}(((1,0,0,0),(1,0,k,0),(0,k,k+1,0)))$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$,

- si determini la dimensione di V_k.
  Risposta $k \neq 0: \ dimV_k = 3; \quad k = 0: \ dimV_k = 2$ ______ **(pt.3)**
- Posto $k = -2$, si determini il complemento ortogonale di V_{-2}.
  Risposta $[V_{-2}]^{\perp} = \mathcal{L}((0,0,0,1))$ ______ **(pt.3)**
- Posto $k = 2$ si trovi una base ortogonale di V_2.
  Risposta $B = ((1,0,0,0),(0,0,2,0),(0,2,0,0))$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $E_3(\mathbb{C})$ sono dati la retta $r: \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}$, il piano $\alpha : x - z = 6$ ed il punto $P = (1,0,2)$. Si determini una rappresentazione cartesiana della retta t ortogonale a r, parallela ad α e passante per P.

Risposta $\begin{cases} y = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- i ranghi delle matrici incompleta e completa;
  Risposta $k \neq 0: \ \rho(A) = \rho(A|B) = 2, \quad k = 0: \ \rho(A) = \rho(A|B) = 1$ ______ **(pt.3)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta $\forall k; \quad k \neq 0 : \infty^1$soluzioni, $\quad k = 0 : \infty^2$soluzioni. ______ **(pt.1)**
- Posto $k = 1$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.
  Risposta $\mathcal{I} = \{(2 - 2t, t, 0) \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ si consideri, al variare del parametro reale k, l'insieme delle coniche $\mathcal{C}_k : kx^2 + (k-1)y^2 + xy - k = 0$. Determinare la conica di $\mathcal{C}_k$ che passa per il punto $P = (1, 1/2)$. Riconoscere la conica trovata e determinarne, se esistono e sono reali, asintoti, centro e assi.

Risposta $x^2 + 2y^2 - xy - 1 = 0$ ellisse; $C = (0,0)$, assi: $a_{1,2} : x - (1 \pm \sqrt{2})y = 0$ ______ **(pt.5)**

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}^3(\mathbb{C})$ è dato il piano $\pi : x + y - 1 = 0$. Si determinino rappresentazioni cartesiane delle sfere di raggio $2\sqrt{2}$ tangenti a π nel punto $P = (1,0,1)$.

Risposta $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 2z - 2 = 0; \quad x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 2z + 6 = 0$ ______ **(pt.3)**

Sia $\mathcal{C}$ la curva ottenuta intersecando $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 4y - 2z + 6 = 0$ con il piano $z = 1$. Si determini l'equazione cartesiana del cono che proietta la curva $\mathcal{C}$ dall'origine $O = (0,0,0)$.

Risposta $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xz - 4yz = 0$ ______ **(pt.4)**

2

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II appello - 27.01.09

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri, al variare del parametro reale k, il sottospazio $V_k = \mathcal{L}(((0,0,0,1),(0,0,k+1,0),(0,k,1,1)))$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$,

- si determini la dimensione di V_k.
  Risposta $k \neq -1,0: \ dimV_k = 3; \quad k = -1,0: \ dimV_k = 2$ **(pt.3)**
- Posto $k = -1$, si determini il complemento ortogonale di V_{-1}.
  Risposta $[V_{-1}]^{\perp} = \mathcal{L}((1,0,0,0)(0,1,1,0))$ **(pt.3)**
- Posto $k = 1$ si trovi una base ortogonale di V_1.
  Risposta $B = ((0,0,0,1),(0,0,2,0),(0,1,0,0))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $E_3(\mathbb{C})$ sono dati la retta $r: \begin{cases} y = 1 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$, il piano $\alpha: y - z = -4$ ed il punto $P = (0,0,1)$. Si determini una rappresentazione cartesiana della retta t ortogonale a r, parallela ad α e passante per P.

Risposta $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- i ranghi delle matrici incompleta e completa;
  Risposta $k \neq 0: \ \rho(A) = \rho(A|B) = 2, \quad k = 0: \ \rho(A) = \rho(A|B) = 1$ **(pt.3)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta $\forall k; \quad k \neq 0: \infty^1$soluzioni, $\quad k = 0: \infty^2$soluzioni. **(pt.1)**
- Posto $k = 1$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.
  Risposta $\mathcal{I} = \{(-1-t, 1, t) \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ si consideri, al variare del parametro reale k, l'insieme delle coniche $\mathcal{C}_k: kx^2 + (k+1)y^2 + 2xy - k = 0$. Determinare la conica di $\mathcal{C}_k$ che passa per il punto $P = (1, -2/3)$. Riconoscere la conica trovata e determinarne, se esistono e sono reali, asintoti, centro e assi.

Risposta $2x^2 + 3y^2 + 2xy - 2 = 0$ ellisse; $C = (0,0)$, assi: $a_{1,2}: 2x - (1 \pm \sqrt{5})y = 0$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}^3(\mathbb{C})$ è dato il piano $\pi: x - 2y = 0$. Si determinino rappresentazioni cartesiane delle sfere di raggio $2\sqrt{5}$ tangenti a π nel punto $P = (0,0,1)$.

Risposta $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 8y - 2z + 1 = 0; \quad x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y - 2z + 1 = 0$ **(pt.3)**

Sia $\mathcal{C}$ la curva ottenuta intersecando $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y - 2z + 1 = 0$ con il piano $x = 2$. Si determini l'equazione cartesiana del cono che proietta la curva $\mathcal{C}$ dall'origine $O = (0,0,0)$.

Risposta $3x^2 - 4y^2 - 4z^2 - 16xy + 4xz = 0$ **(pt.4)**

3

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II appello - 27.01.09

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri, al variare del parametro reale k, il sottospazio $V_k = \mathcal{L}(((0,1,0,0),(k,0,k+1,1),(1,k,0,0)))$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$,

- si determini la dimensione di V_k.
  Risposta $\forall k: \ dim V_k = 3$ **(pt.3)**
- Posto $k=1$, si determini il complemento ortogonale di V_1.
  Risposta $[V_1]^\perp = \mathcal{L}((0,0,-1,2))$ **(pt.3)**
- Posto $k=2$ si trovi una base ortogonale di V_2.
  Risposta $B = ((0,1,0,0),(2,0,3,1),(5,0,-3,-1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $E_3(\mathbb{C})$ sono dati la retta $r: \begin{cases} x-2=0 \\ 2y+z=1 \end{cases}$, il piano $\alpha: x-y=5$ ed il punto $P=(1,0,0)$. Si determini una rappresentazione cartesiana della retta t ortogonale a r, parallela ad α e passante per P.

Risposta $\begin{cases} x-y-1=0 \\ y-2z=0 \end{cases}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Si consideri il sistema $AX=B$ con

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & 0 & 1 \\ k+1 & k-1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- i ranghi delle matrici incompleta e completa;
  Risposta $\forall k: \ \rho(A) = \rho(A|B) = 2$ **(pt.3)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta $\forall k; \infty^1$soluzioni. **(pt.1)**
- Posto $k=-1$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX=B$.
  Risposta $\mathcal{I} = \{(t,-1/2,1+2t) \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ si consideri, al variare del parametro reale k, l'insieme delle coniche $\mathcal{C}_k: (k+2)x^2+2y^2+(k+3)xy-k-1=0$. Determinare la conica di $\mathcal{C}_k$ che passa per il punto $P=(0,1)$. Riconoscere la conica trovata e determinarne, se esistono e sono reali, asintoti, centro e assi.

Risposta $3x^2+2y^2+4xy-2=0$ ellisse; $C=(0,0)$, assi: $a_{1,2}: 4x-(1\pm\sqrt{17})y=0$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}^3(\mathbb{C})$ è dato il piano $\pi: y-z+2=0$. Si determinino rappresentazioni cartesiane delle sfere di raggio $4\sqrt{2}$ tangenti a π nel punto $P=(0,-2,0)$.

Risposta $x^2+y^2+z^2-4y+8z-12=0; \quad x^2+y^2+z^2+12y-8z+20=0$ **(pt.3)**

Sia $\mathcal{C}$ la curva ottenuta intersecando $\Sigma: x^2+y^2+z^2+12y-8z+20=0$ con il piano $z=4$. Si determini l'equazione cartesiana del cono che proietta la curva $\mathcal{C}$ dall'origine $O=(0,0,0)$.

Risposta $4x^2+4y^2+z^2+12yz=0$ **(pt.4)**

4

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II appello - 27.01.09

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri, al variare del parametro reale k, il sottospazio $V_k = \mathcal{L}(((0,0,1,0),(1,k,0,k),(k,0,0,k+1)))$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$,

- si determini la dimensione di V_k.
  Risposta $\forall k:\ dim V_k = 3$ **(pt.3)**
- Posto $k=-1$, si determini il complemento ortogonale di V_{-1}.
  Risposta $[V_{-1}]^{\perp} = \mathcal{L}((0,1,0,-1))$ **(pt.3)**
- Posto $k=1$ si trovi una base ortogonale di V_1.
  Risposta $B = ((0,0,1,0),(1,1,0,1),(0,-1,0,1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $E_3(\mathbb{C})$ sono dati la retta $r: \begin{cases} x+y=0 \\ z-3=0 \end{cases}$, il piano $\alpha: 2x+z=2$ ed il punto $P=(2,0,1)$. Si determini una rappresentazione cartesiana della retta t ortogonale a r, parallela ad α e passante per P.

Risposta $\begin{cases} x-y-2=0 \\ 2y+z-1=0 \end{cases}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Si consideri il sistema $AX=B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & k \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k+1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- i ranghi delle matrici incompleta e completa;
  Risposta $k \neq 0:\ \rho(A)=\rho(A|B)=2, \quad k=0:\ \rho(A)=1 \neq \rho(A|B)=2$ **(pt.3)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta $k \neq 0$; ∞^1soluzioni. **(pt.1)**
- Posto $k=1$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX=B$.
  Risposta $\mathcal{I} = \{(t,-1,2) \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ si consideri, al variare del parametro reale k, l'insieme delle coniche $\mathcal{C}_k: x^2+ky^2+(k-1)xy-1=0$. Determinare la conica di $\mathcal{C}_k$ che passa per il punto $P=(1,-2/3)$. Riconoscere la conica trovata e determinarne, se esistono e sono reali, asintoti, centro e assi.

Risposta $x^2+3y^2+2xy-1=0$ ellisse; $C=(0,0)$, assi: $a_{1,2}: x+(1\pm\sqrt{2})y=0$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}^3(\mathbb{C})$ è dato il piano $\pi: x+z-1=0$. Si determinino rappresentazioni cartesiane delle sfere di raggio $4\sqrt{2}$ tangenti a π nel punto $P=(0,0,1)$.

Risposta $x^2+y^2+z^2+8x+6z-7=0, \quad x^2+y^2+z^2-8x-10z+9=0$ **(pt.3)**

Sia $\mathcal{C}$ la curva ottenuta intersecando $\Sigma: x^2+y^2+z^2-8x-10z+9=0$ con il piano $x=4$. Si determini l'equazione cartesiana del cono che proietta la curva $\mathcal{C}$ dall'origine $O=(0,0,0)$.

Risposta $7x^2-16y^2-16z^2+40xz=0$ **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II appello - 27.01.09

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri, al variare del parametro reale k, il sottospazio $V_k = \mathcal{L}(((1,0,0,0),(0,k,1,1),(1,k-1,0,0)))$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$,

- si determini la dimensione di V_k.
  Risposta $k \neq 1: \; dimV_k = 3; \quad k = 1: \; dimV_k = 2$ **(pt.3)**
- Posto $k = 1$, si determini il complemento ortogonale di V_1.
  Risposta $[V_1]^{\perp} = \mathcal{L}((0,1,0,-1),(0,0,1,-1))$ **(pt.3)**
- Posto $k = 2$ si trovi una base ortogonale di V_2.
  Risposta $B = ((1,0,0,0),(0,2,1,1),(0,1,-1,-1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $E_3(\mathbb{C})$ sono dati la retta $r: \begin{cases} y-1=0 \\ x+z=2 \end{cases}$, il piano $\alpha: x+y+z=0$ ed il punto $P=(0,1,0)$. Si determini una rappresentazione cartesiana della retta t ortogonale a r, parallela ad α e passante per P.

Risposta $\begin{cases} x-z=0 \\ 2x+y-1=0 \end{cases}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} k & k-1 & 1 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- i ranghi delle matrici incompleta e completa;
  Risposta $\forall k: \; \rho(A) = \rho(A|B) = 2$ **(pt.3)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta $\forall k; \; \infty^1$soluzioni. **(pt.1)**
- Posto $k = 0$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.
  Risposta $\mathcal{I} = \{(t,1,1) \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ si consideri, al variare del parametro reale k, l'insieme delle coniche $\mathcal{C}_k: (k+2)x^2 + y^2 + kxy - 3 = 0$. Determinare la conica di $\mathcal{C}_k$ che passa per il punto $P = (1,0)$. Riconoscere la conica trovata e determinarne, se esistono e sono reali, asintoti, centro e assi.

Risposta $3x^2 + y^2 + xy - 3 = 0$ ellisse; $C = (0,0)$, assi: $a_{1,2}: x - (2 \pm \sqrt{5})y = 0$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}^3(\mathbb{C})$ è dato il piano $\pi: x - 2 = 0$. Si determinino rappresentazioni cartesiane delle sfere di raggio 6 tangenti a π nel punto $P = (2,0,1)$.

Risposta $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 2z - 19 = 0; \quad x^2 + y^2 + z^2 - 16x - 2z + 29 = 0$ **(pt.3)**

Sia $\mathcal{C}$ la curva ottenuta intersecando $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 - 16x - 2z + 29 = 0$ con il piano $z = 1$. Si determini l'equazione cartesiana del cono che proietta la curva $\mathcal{C}$ dall'origine $O = (0,0,0)$.

Risposta $x^2 + y^2 + 28z^2 - 16xz = 0$ **(pt.4)**

6

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - II appello - 27.01.09

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri, al variare del parametro reale k, il sottospazio $V_k = \mathcal{L}(((1,0,0,0),(0,k,0,0),(k+1,0,k,k-1)))$. Al variare di $k \in \mathbb{R}$,

- si determini la dimensione di V_k.
  Risposta $k \neq 0: \ dimV_k = 3; \quad k = 0: \ dimV_k = 2$ **(pt.3)**
- Posto $k = 2$, si determini il complemento ortogonale di V_2.
  Risposta $[V_2]^\perp = \mathcal{L}((0,0,1,-2))$ **(pt.3)**
- Posto $k = 1$ si trovi una base ortogonale di V_1.
  Risposta $B = ((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $E_3(\mathbb{C})$ sono dati la retta $r : \begin{cases} 2x+y=0 \\ z-y=1 \end{cases}$, il piano $\alpha : x = 7$ ed il punto $P = (0,0,0)$. Si determini una rappresentazione cartesiana della retta t ortogonale a r, parallela ad α e passante per P.

Risposta $\begin{cases} x=0 \\ y+z=0 \end{cases}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & k^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k si determinino:

- i ranghi delle matrici incompleta e completa;
  Risposta $k \neq 0: \ \rho(A) = \rho(A|B) = 2, \quad k = 0: \ \rho(A) = \rho(A|B) = 1$ **(pt.3)**
- i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta $\forall k; \quad k \neq 0 : \infty^1$soluzioni, $\quad k = 0 : \infty^2$soluzioni. **(pt.1)**
- Posto $k = 2$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.
  Risposta $\mathcal{I} = \{(-2t, t, 1+2t) \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{A}_2(\mathbb{C})$ si consideri, al variare del parametro reale k, l'insieme delle coniche $\mathcal{C}_k : 2x^2 + (k+2)y^2 + kxy - 6 = 0$. Determinare la conica di $\mathcal{C}_k$ che passa per il punto $P = (0,-1)$. Riconoscere la conica trovata e determinarne, se esistono e sono reali, asintoti, centro e assi.

Risposta $x^2 + 3y^2 + 2xy - 3 = 0$ ellisse; $C = (0,0)$, assi: $a_{1,2} : x + (1 \pm \sqrt{2})y = 0$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}^3(\mathbb{C})$ è dato il piano $\pi : y - 2z = 0$. Si determinino rappresentazioni cartesiane delle sfere di raggio $\sqrt{5}$ tangenti a π nel punto $P = (1,0,0)$.

Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 1 = 0; \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 4z + 1 = 0$ **(pt.3)**

Sia $\mathcal{C}$ la curva ottenuta intersecando $\Sigma : x^2+y^2+z^2-2x-2y+4z+1 = 0$ con il piano $y = 1$. Si determini l'equazione cartesiana del cono che proietta la curva $\mathcal{C}$ dall'origine $O = (0,0,0)$.

Risposta $x^2 + z^2 - 2xy + 4yz = 0$ **(pt.4)**