1

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 3° appello - 19/04/2011

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & k+1 & 1 \\ k & -\frac{1}{2} & k+1 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2k \end{pmatrix}.$$

- Al variare del parametro reale k si determinino i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta compatibile per $k \neq -\frac{1}{2}$, $k \neq -\frac{1}{2} \wedge k \neq -1 : \exists!\ sol$, $k = -1 : \infty^1\ sol$ ______ **(pt.4)**

  Posto $k = -1$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.
  Risposta $\{(x, 2-2x, -2x) \in \mathbb{R}^3 | x \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- Si dica se la matrice A è diagonalizzabile, in caso affermativo si trovi una matrice diagonale simile ad A.
  Risposta Sì, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**
- Si trovi una matrice ortogonale Q tale che $Q^{-1}\ A\ Q = D$, dove D è una matrice diagonale .
  Risposta $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**
- indicata con $\mathcal{C}$ la conica di $\widetilde{E}_2(\mathbb{R})$ rappresentata dalla matrice A, si riconosca $\mathcal{C}$ e se ne determini il centro (proprio o improprio).
  Risposta Ellisse, $C = (1/6, -1/3)$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$, fissato un riferimento cartesiano, sono date le rette $r : \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ y + hz = 0 \end{cases}$.

- Si determinino i valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ per i quali le rette r e s risultino complanari e un'equazione cartesiana del piano che le contiene .
  Risposta $h = -2,\ y - 2z = 0$ ______ **(pt.2)**
- Per i valori per i quali le due rette sono complanari si determini la posizione reciproca di r e s.
  Risposta incidenti in $(1, 2, 1)$ ______ **(pt.2)**
- Posto $h = 0$ si trovi un'equazione della retta di minima distanza tra r e s.
  Risposta $\begin{cases} x + 2y - 3 = 0 \\ 5z - 3 = 0 \end{cases}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_3(\mathbb{R})$ dati la sfera $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z = 0$ e il piano $\pi : x + y - z = 0$, si determinino:

- le coordinate del centro e il raggio della circonferenza γ intersezione di Σ con π;
  Risposta $C = (\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}), r = \sqrt{\frac{14}{3}}$ ______ **(pt.3)**
- una rappresentazione cartesiana della retta tangente a γ nell'origine $O = (0, 0, 0)$.
  Risposta $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ ______ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana del cilindro quadrico che proietta i punti di γ da $V_\infty = [(0, 0, 1, 0)]$.
  Risposta $x^2 + y^2 + xy - 2x - 3y = 0$ ______ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 3° appello - 19/04/2011

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & k+1 & 1 \\ k & -\frac{1}{2} & k+1 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \\ 4k \end{pmatrix}.$$

- Al variare del parametro reale k si determinino i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta compatibile per $k \neq -\frac{1}{2}$, $k \neq -\frac{1}{2} \wedge k \neq -1 : \exists!\ sol$, $k = -1 : \infty^1\ sol$ ______ **(pt.4)**

  Posto $k = -1$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.
  Risposta $\{(x, 4-2x, -2x) \in \mathbb{R}^3 | x \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

- Si dica se la matrice A è diagonalizzabile, in caso affermativo si trovi una matrice diagonale simile ad A.
  Risposta Sì, $P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**
- Si trovi una matrice ortogonale Q tale che $Q^{-1}\ A\ Q = D$, dove D è una matrice diagonale .
  Risposta $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**
- indicata con $\mathcal{C}$ la conica di $\widetilde{E}_2(\mathbb{R})$ rappresentata dalla matrice A, si riconosca $\mathcal{C}$ e se ne determini il centro (proprio o improprio).
  Risposta Iperbole, $C = (2, 1)$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$, fissato un riferimento cartesiano, sono date le rette $r : \begin{cases} y - z = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x + hz = 0 \end{cases}$.

- Si determinino i valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ per i quali le rette r e s risultino complanari e un'equazione cartesiana del piano che le contiene .
  Risposta $h = -2$, $x - 2z = 0$ ______ **(pt.2)**
- Per i valori per i quali le due rette sono complanari si determini la posizione reciproca di r e s.
  Risposta incidenti in $(2, 1, 1)$ ______ **(pt.2)**
- Posto $h = 0$ si trovi un'equazione della retta di minima distanza tra r e s.
  Risposta $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ 5z - 3 = 0 \end{cases}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_3(\mathbb{R})$ dati la sfera $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z = 0$ e il piano $\pi : x + y - z = 0$, si determinino:

- le coordinate del centro e il raggio della circonferenza γ intersezione di Σ con π;
  Risposta $C = (\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}), r = \sqrt{\frac{14}{3}}$ ______ **(pt.3)**
- una rappresentazione cartesiana della retta tangente a γ nell'origine $O = (0, 0, 0)$.
  Risposta $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ ______ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana del cilindro quadrico che proietta i punti di γ da $V_\infty = [(0, 1, 0, 0)]$.
  Risposta $x^2 + z^2 - xz + x - 3z = 0$ ______ **(pt.3)**

3

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 3° appello - 19/04/2011

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ k+1 & -\frac{1}{2} & k+2 \\ 2 & k+2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2k-2 \\ k+1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Al variare del parametro reale k si determinino i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta compatibile per $k \neq -\frac{3}{2}$, $k \neq -\frac{3}{2} \wedge k \neq -2 : \exists!\ sol$, $k = -2 : \infty^1\ sol$ ______ **(pt.4)**

  Posto $k = -2$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.
  Risposta $\{(x, 2-2x, -2x) \in \mathbb{R}^3 | x \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

- Si dica se la matrice A è diagonalizzabile, in caso affermativo si trovi una matrice diagonale simile ad A.
  Risposta Sì, $P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**
- Si trovi una matrice ortogonale Q tale che $Q^{-1}\ A\ Q = D$, dove D è una matrice diagonale .
  Risposta $Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**
- indicata con $\mathcal{C}$ la conica di $\widetilde{E}_2(\mathbb{R})$ rappresentata dalla matrice A, si riconosca $\mathcal{C}$ e se ne determini il centro (proprio o improprio).
  Risposta Iperbole, $C = (1, 2)$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$, fissato un riferimento cartesiano, sono date le rette $r : \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x + y = 0 \\ y + (h-2)z + h = 0 \end{cases}$.

- Si determinino i valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ per i quali le rette r e s risultino complanari e un'equazione cartesiana del piano che le contiene .
  Risposta $h = 0,\ y - 2z = 0$ ______ **(pt.2)**
- Per i valori per i quali le due rette sono complanari si determini la posizione reciproca di r e s.
  Risposta incidenti in $(0, 0, 0)$ ______ **(pt.2)**
- Posto $h = 2$ si trovi un'equazione della retta di minima distanza tra r e s.
  Risposta $\begin{cases} 2 + 5z = 0 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_3(\mathbb{R})$ dati la sfera $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y - 4z = 0$ e il piano $\pi : x + y - z = 0$, si determinino:

- le coordinate del centro e il raggio della circonferenza γ intersezione di Σ con π;
  Risposta $C = (\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}), r = \sqrt{\frac{56}{3}}$ ______ **(pt.3)**
- una rappresentazione cartesiana della retta tangente a γ nell'origine $O = (0, 0, 0)$.
  Risposta $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ ______ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana del cilindro quadrico che proietta i punti di γ da $V_\infty = [(0, 0, 1, 0)]$.
  Risposta $x^2 + y^2 + xy - 4x - 6y = 0$ ______ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 3° appello - 19/04/2011

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema $AX = B$ con

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ k-1 & -\frac{1}{2} & k \\ 2 & k & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4-4k \\ 2k-2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Al variare del parametro reale k si determinino i valori di k per i quali il sistema assegnato è compatibile e, in tal caso, si dica quante sono le soluzioni.
  Risposta compatibile per $k \neq \frac{1}{2}$, $k \neq \frac{1}{2} \wedge k \neq 0 : \exists!\ sol$, $k = 0 : \infty^1\ sol$ ____________ **(pt.4)**

  Posto $k = 0$ si determini l'insieme $\mathcal{I}$ delle soluzioni del sistema $AX = B$.
  Risposta $\{(x, 4-2x, -2x) \in \mathbb{R}^3 | x \in \mathbb{R}\}$ ____________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Si dica se la matrice A è diagonalizzabile, in caso affermativo si trovi una matrice diagonale simile ad A.
  Risposta Sì, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ ____________ **(pt.3)**
- Si trovi una matrice ortogonale Q tale che $Q^{-1}\ A\ Q = D$, dove D è una matrice diagonale .
  Risposta $Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ ____________ **(pt.3)**
- indicata con $\mathcal{C}$ la conica di $\widetilde{E}_2(\mathbb{R})$ rappresentata dalla matrice A, si riconosca $\mathcal{C}$ e se ne determini il centro (proprio o improprio).
  Risposta Ellisse, $C = (-1/3, 1/6)$ ____________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $E_3(\mathbb{R})$, fissato un riferimento cartesiano, sono date le rette $r : \begin{cases} y - z = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases}$ e $s : \begin{cases} x + y = 0 \\ x + (h-1)z + h + 1 = 0 \end{cases}$.

- Si determinino i valori del parametro $h \in \mathbb{R}$ per i quali le rette r e s risultino complanari e un'equazione cartesiana del piano che le contiene .
  Risposta $h = -1,\ x - 2z = 0$ ____________ **(pt.2)**
- Per i valori per i quali le due rette sono complanari si determini la posizione reciproca di r e s.
  Risposta incidenti in $(0, 0, 0)$ ____________ **(pt.2)**
- Posto $h = 1$ si trovi un'equazione della retta di minima distanza tra r e s.
  Risposta $\begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ 5z + 2 = 0 \end{cases}$ ____________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_3(\mathbb{R})$ dati la sfera $\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z = 0$ e il piano $\pi : x + y + z = 0$, si determinino:

- le coordinate del centro e il raggio della circonferenza γ intersezione di Σ con π;
  Risposta $C = (\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{3}), r = \sqrt{\frac{14}{3}}$ ____________ **(pt.3)**
- una rappresentazione cartesiana della retta tangente a γ nell'origine $O = (0, 0, 0)$.
  Risposta $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ ____________ **(pt.2)**
- un'equazione cartesiana del cilindro quadrico che proietta i punti di γ da $V_\infty = [(1, 0, 0, 0)]$.
  Risposta $y^2 + z^2 + yz + y + 3z = 0$ ____________ **(pt.3)**