UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello 08/02/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k-1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & k+1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.
  Risposta Per $k = 1$ compatibile con ∞^1 soluzioni. Per $k \neq 1$ incompatibile. ____ **(pt.3)**
- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $(3, 1)$ è una soluzione del sistema.
  Risposta $k = 1$ ____ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, dotato del prodotto scalare euclideo, si consideri $U = \mathcal{L}(\{(a, 1, 3a-1) \in \mathbb{R}^3 | a \in \mathbb{R}\})$. Si determini il complemento ortogonale di U.
Risposta $U^\perp = \{(-3z, z, z) \in \mathbb{R}^3 | z \in \mathbb{R}\}$ ____ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1-k & k+1 \\ 4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino i valori di k per i quali la matrice è:

- diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq 9$ ____ **(pt.4)**
- ortogonalmente diagonalizzabile.
  Risposta $k = -1$ ____ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{\mathbb{E}}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $C_k : x^2 + (k-6)y^2 + 2x + 2ky = 0$ dove k è un parametro reale. Si determini per quali valori di k:

- i punti $P = (1, 0)$ e $Q = (0, -1)$ sono coniugati;
  Risposta $k = 1$ ____ **(pt.1)**
- il punto $R = (1, 0)$ e la retta $r : 2x + 1 = 0$ sono una coppia polo-polare;
  Risposta $k = 0$ ____ **(pt.2)**
- il punto $S = (1, 1)$ e' un punto doppio per la conica;
  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ ____ **(pt.2)**
- la conica ha un asistoto parallelo alla retta $s : x + y + 2 = 0$;
  Risposta $k = 5$ ____ **(pt.2)**
- la conica passa per il punto ciclico del piano J_∞.
  Risposta $k = 7$ ____ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ si determini un'equazione cartesiana della sfera avente centro nel punto $C = (3, 1, 0)$ e tangente alla retta $r : 2x + y + 2 = 0 = x + 1$.
Risposta $S : (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 17$ ____ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. In $\tilde{\mathbb{E}}_3(\mathbb{C})$, dato il cilindro $Q : x^2 + xy - 3y^2 - 1 = 0$, si determinino due piani α e β tali che $Q \cap \alpha$ sia una conica generale e $Q \cap \beta$ sia una conica riducibile, giustificando la scelta effettuata di α e β.
Risposta Il vertice del cilindro è il punto $Z_\infty = [(0, 0, 1, 0)]$. $\alpha : z = 0$ poiché $Z_\infty \notin \alpha$ e $\beta : y = 0$ poiché $Z_\infty \in \beta$. ____ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello 08/02/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 0 & k-3 \\ 2 & 0 \\ k-5 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.
  Risposta Per $k = 3$ compatibile con ∞^1 soluzioni. Per $k \neq 3$ incompatibile. **(pt.3)**
- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $(3, 2)$ è una soluzione del sistema.
  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, dotato del prodotto scalare euclideo, si consideri $U = \mathcal{L}(\{(2a, 6-a, 3) \in \mathbb{R}^3 | a \in \mathbb{R}\})$. Si determini il complemento ortogonale di U.
Risposta $U^\perp = \{(\frac{1}{2}y, y, -2y) \in \mathbb{R}^3 | y \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 0 & k+1 & 2 \\ 0 & k+2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino i valori di k per i quali la matrice è:

- diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq -6$ **(pt.4)**
- ortogonalmente diagonalizzabile.
  Risposta $k = -1$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{\mathbb{E}}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $C_k : 5kx^2 + (1-k)y^2 - 4kx + k = 0$ dove k è un parametro reale. Si determini per quali valori di k:

- i punti $P = [(2, 0, 0)]$ e $Q = (\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ sono coniugati;
  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ **(pt.1)**
- il punto $R = [(2, 0, 0)]$ e la retta $r : 5x - 2 = 0$ sono una coppia polo-polare;
  Risposta $\forall k \in \mathbb{R} k \neq 0$ **(pt.2)**
- il punto $S = [(2, 1, 0)]$ e' un punto doppio per la conica;
  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ **(pt.2)**
- la conica ha un asistoto parallelo alla retta $s : 5x - 2y = 0$;
  Risposta $k = 5$ **(pt.2)**
- la conica passa per il punto ciclico del piano J_∞.
  Risposta $k = \frac{1}{6}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ si determini un'equazione cartesiana della sfera avente centro nel punto $C = (0, 2, 1)$ e tangente alla retta $r : x - y = 0 = z - 5$.
Risposta $S : x^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 18$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. In $\tilde{\mathbb{E}}_3(\mathbb{C})$, dato il cilindro $Q : 2x^2 + xz + 5z^2 - 2 = 0$, si determinino due piani α e β tali che $Q \cap \alpha$ sia una conica generale e $Q \cap \beta$ sia una conica riducibile, giustificando la scelta effettuata di α e β.
Risposta Il vertice del cilindro è il punto $Y_\infty = [(0, 1, 0, 0)]$. $\alpha : y = 0$ poiché $Y_\infty \notin \alpha$ e $\beta : z = 0$ poiché $Y_\infty \in \beta$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello 08/02/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.
  Risposta Per $k = 2$ compatibile con una e una sola soluzione. Per $k \neq 2$ incompatibile. ______ **(pt.3)**
- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $(2, 1)$ è una soluzione del sistema.
  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, dotato del prodotto scalare euclideo, si consideri $U = \mathcal{L}(\{(a, 3a, 2-a) \in \mathbb{R}^3 | a \in \mathbb{R}\})$. Si determini il complemento ortogonale di U.
Risposta $U^\perp = \{(-3y, y, 0) \in \mathbb{R}^3 | y \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ k+1 & 0 & k \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino i valori di k per i quali la matrice è:

- diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq 4$ ______ **(pt.4)**
- ortogonalmente diagonalizzabile.
  Risposta $k = -1$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{\mathbb{E}}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $C_k : (k-1)x^2 + 2xy + 2ky - 2k = 0$ dove k è un parametro reale. Si determini per quali valori di k:

- i punti $P = (0, -1)$ e $Q = [(2, -1, 0)]$ sono coniugati;
  Risposta $k = -2$ ______ **(pt.1)**
- il punto $R = (0, -1)$ e la retta $r : x - y + 3 = 0$ sono una coppia polo-polare;
  Risposta $k = 1$ ______ **(pt.2)**
- il punto $S = (0, -1)$ e' un punto doppio per la conica;
  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.2)**
- la conica ha un asistoto parallelo alla retta $s : x = 6$;
  Risposta $\forall k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.2)**
- la conica passa per il punto ciclico del piano J_∞.
  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ si determini un'equazione cartesiana della sfera avente centro nel punto $C = (0, 1, 1)$ e tangente alla retta $r : y + z - 6 = 0 = x - 2y$.
Risposta $S : x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 20$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. In $\tilde{\mathbb{E}}_3(\mathbb{C})$, dato il cilindro $Q : y^2 - yz - 2z^2 + z = 0$, si determinino due piani α e β tali che $Q \cap \alpha$ sia una conica generale e $Q \cap \beta$ sia una conica riducibile, giustificando la scelta effettuata di α e β.
Risposta Il vertice del cilindro è il punto $X_\infty = [(1, 0, 0, 0)]$. $\alpha : x = 0$ poiché $X_\infty \notin \alpha$ e $\beta : y = 0$ poiché $X_\infty \in \beta$ ___ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello 08/02/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.
  Risposta Per $k = -3$ compatibile con una e una sola soluzione. Per $k \neq -3$ incompatibile. ______ **(pt.3)**
- Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $(-1, -3)$ è una soluzione del sistema.
  Risposta $k = -3$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, dotato del prodotto scalare euclideo, si consideri $U = \mathcal{L}(\{(2a+3, -2a, a) \in \mathbb{R}^3 | a \in \mathbb{R}\})$. Si determini il complemento ortogonale di U.
Risposta $U^\perp = \{(0, y, 2y) \in \mathbb{R}^3 | y \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. Data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} k+2 & 0 & 0 \\ k+3 & 8 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino i valori di k per i quali la matrice è:

- diagonalizzabile;
  Risposta $k \neq 7$ ______ **(pt.4)**
- ortogonalmente diagonalizzabile.
  Risposta $k = -3$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{\mathbb{E}}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $C_k : 2x^2 + 2x - k^2y^2 - ky = 0$ dove k è un parametro reale. Si determini per quali valori di k:

- i punti $P = [(1, 2, 0)]$ e $Q = (-\frac{1}{2}, 0)$ sono coniugati;
  Risposta $k = 0$ ______ **(pt.1)**
- il punto $R = [(1, 2, 0)]$ e la retta $r : x - y = 0$ sono una coppia polo-polare;
  Risposta $k = 1$ ______ **(pt.2)**
- il punto $S = [(1, 2, 0)]$ e' un punto doppio per la conica;
  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.2)**
- la conica ha un asistoto parallelo alla retta $s : x = -2$;
  Risposta $k = 0$ ______ **(pt.2)**
- la conica passa per il punto ciclico del piano J_∞.
  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ si determini un'equazione cartesiana della sfera avente centro nel punto $C = (2, 1, -1)$ e tangente alla retta $r : y - 3 = 0 = x$.
Risposta $S : (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 8$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. In $\tilde{\mathbb{E}}_3(\mathbb{C})$, dato il cilindro $Q : xz + 3z^2 + x - 1 = 0$, si determinino due piani α e β tali che $Q \cap \alpha$ sia una conica generale e $Q \cap \beta$ sia una conica riducibile, giustificando la scelta effettuata di α e β.
Risposta Il vertice del cilindro è il punto $Y_\infty = [(0, 1, 0, 0)]$. $\alpha : y = 0$ poiché $Y_\infty \notin \alpha$ e $\beta : z = 0$ poiché $Y_\infty \in \beta$ ______ **(pt.3)**