UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello 19/01/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 10 & k-1 & 4 \\ 0 & 5 & k & 2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 2-k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.
  Risposta Per $k \neq -1$ compatibile con ∞^2 soluzioni. Per $k = -1$ incompatibile. ______ **(pt.3)**
- Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni ammette base.
  Risposta $k = 2$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Dati $U = \mathcal{L}((0,1,0,1),(0,1,1,0))$ e $W = \{(a,b,a+c,a+b+c) \in \mathbb{R}^4 \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$, si determinino:

- una base di $U \cap W$
  Risposta $B_{U\cap W} = ((0,1,0,1))$ ______ **(pt.3)**
- la dimensione di $U + W$.
  Risposta $dim(U + W) = 4$ ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, si dica se il vettore $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore di A e, in caso affermativo, si determinino il relativo autovalore e l'autospazio al quale appartiene.
Risposta $\lambda = -2$, $\quad V_{-2} = \{(0,3h,k,h) \in \mathbb{R}^4 | h,k \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{A}_3(\mathbb{C})$ si determini una base dello spazio di traslazione del piano $\alpha : 2ix + y - z + 1 = 0$.
Risposta $B = ((1,-2i,0),(0,1,1))$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\tilde{\mathbb{E}}_2(\mathbb{C})$:

- si riconosca la conica $C : x^2 + y^2 + 4xy - 2y + 1 = 0$ e si determinino il centro, il fascio dei diametri e gli assi di C;
  Risposta Iperbole, centro $C = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, fascio: $(x + 2y)l + (2x + y - 1)m = 0$, assi: $3x + 3y - 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$ ______ **(pt.4)**
- si determini il polo della retta $r : x + y = 0$ nella polarità indotta da C.
  Risposta $P = (2,1)$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. In $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ si determini un'equazione cartesiana di una sfera avente centro sulla retta $r : x + y = 0 = z - 2x$, tangente al piano $\alpha : x - 1 = 0$ e passante per $P = (1,0,0)$.
Risposta $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 7. In $\tilde{\mathbb{A}}_3(\mathbb{C})$ si consideri la retta $r : ix - 1 = 0 = 2ix + y + (i+1)z$. Si dica, giustificando la risposta, se r ammette un punto reale.
Risposta Il determinante della matrice che ha nelle righe i coefficienti di r e $\bar{r}$ è non nullo, quindi la retta è immaginaria di seconda specie e non ha punti reali. ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 8. In $\tilde{\mathbb{E}}_3(\mathbb{C})$ dato il paraboloide $Q : (x-2)^2 + (y-2)^2 + z = 0$ si determini un piano α tale che $Q \cap \alpha$ sia una parabola.
Risposta $y = 0$ ______ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello 19/01/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2 & k-2 & k^2 & 4 \\ 6 & 0 & 12 & 6k \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k-7 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.
  Risposta Per $k \neq 2$ compatibile con ∞^2 soluzioni. Per $k = 2$ incompatibile. ______ **(pt.3)**
- Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni ammette base.
  Risposta $k = 7$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Dati $U = \mathcal{L}((1,0,0,1),(2,0,1,0))$ e $W = \{(a,b,b+c,a+b+c) \in \mathbb{R}^4 \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$, si determinino:

- una base di $U \cap W$
  Risposta $B_{U\cap W} = ((1,0,0,1))$ ______ **(pt.3)**
- la dimensione di $U + W$.
  Risposta $dim(U+W) = 4$ ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, si dica se il vettore $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un autovettore di A e, in caso affermativo, si determinino il relativo autovalore e l'autospazio al quale appartiene.
Risposta $\lambda = -1, \quad V_{-1} = \{(-2h,0,h,k) \in \mathbb{R}^4 | h,k \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{A}_3(\mathbb{C})$ si determini una base dello spazio di traslazione del piano $\alpha : x + iy - z + 3 = 0$.
Risposta $B = ((-i,1,0),(1,0,1))$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\tilde{\mathbb{E}}_2(\mathbb{C})$:

- si riconosca la conica $C : 2x^2 + 2y^2 + 2xy + 6y - 1 = 0$ e si determinino il centro, il fascio dei diametri e gli assi di C;
  Risposta Ellisse, centro $C = (1,-2)$, fascio $(2x+y)l + (x+2y+3)m = 0$, assi $x+y+1=0$, $x-y-3=0$ _ **(pt.4)**
- si determini il polo della retta $r : x - y = 0$ nella polarità indotta da C.
  Risposta $P = \left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. In $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ si determini un'equazione cartesiana di una sfera avente centro sulla retta $r : x + y = 0 = z - 2y$, tangente al piano $\alpha : z - 1 = 0$ e passante per $P = (1,0,0)$.
Risposta $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ oppure $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z+6)^2 = 49$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 7. In $\tilde{\mathbb{A}}_3(\mathbb{C})$ si consideri la retta $r : iy - 1 = 0 = x + 2iy + (1-i)z$. Si dica, giustificando la risposta, se r ammette un punto reale.
Risposta Il determinante della matrice che ha nelle righe i coefficienti di r e $\bar{r}$ è non nullo, quindi la retta è immaginaria di seconda specie e non ha punti reali. ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 8. In $\tilde{\mathbb{E}}_3(\mathbb{C})$ dato il paraboloide $Q : (y+1)^2 + (z+7)^2 - x = 0$ si determini un piano α tale che $Q \cap \alpha$ sia una parabola.
Risposta $y = 0$ ______ **(pt.3)**

3

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello 19/01/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k & 0 & 4 & 1 \\ k-1 & k+1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} k+3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.
  Risposta Per $k \neq -1$ compatibile con ∞^2 soluzioni. Per $k = -1$ incompatibile **(pt.3)**
- Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni ammette base.
  Risposta $k = -3$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Dati $U = \mathcal{L}((1,0,1,1),(0,0,0,3))$ e $W = \{(a+2b, b, c, b+c) \in \mathbb{R}^4 \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$, si determinino:

- una base di $U \cap W$
  Risposta $B_{U \cap W} = ((1,0,1,1))$ **(pt.3)**
- la dimensione di $U + W$.
  Risposta $dim(U + W) = 4$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, si dica se il vettore $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ è un autovettore di A e, in caso affermativo, si determinino il relativo autovalore e l'autospazio al quale appartiene.
Risposta $\lambda = 2, \quad V_2 = \{(h, -k, 4k, k) \in \mathbb{R}^4 | h, k \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{A}_3(\mathbb{C})$ si determini una base dello spazio di traslazione del piano $\alpha : 2x - iy + z + 2 = 0$.
Risposta $B = ((1,0,-2),(0,1,i))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\tilde{\mathbb{E}}_2(\mathbb{C})$:

- si riconosca la conica $C : x^2 + y^2 + 6xy - 2x - 2 = 0$ e si determinino il centro, il fascio dei diametri e gli assi di C;
  Risposta Iperbole, centro $C = \left(-\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right)$, fascio $(x + 3y - 1)l + (3x + y)m = 0$, assi $4x + 4y - 1 = 0$, $2x - 2y + 1 = 0$ **(pt.4)**
- si determini il polo della retta $r : x + y = 0$ nella polarità indotta da C.
  Risposta $P = \left(-2, -\frac{3}{2}\right)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. In $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ si determini un'equazione cartesiana di una sfera avente centro sulla retta $r : x - 2y = 0 = z + y$, tangente al piano $\alpha : y - 1 = 0$ e passante per $P = (0,1,0)$.
Risposta $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 7. In $\tilde{\mathbb{A}}_3(\mathbb{C})$ si consideri la retta $r : iz - 1 = 0 = (i+1)x + 3y + 2iz$. Si dica, giustificando la risposta, se r ammette un punto reale.
Risposta Il determinante della matrice che ha nelle righe i coefficienti di r e $\bar{r}$ è non nullo, quindi la retta è immaginaria di seconda specie e non ha punti reali. **(pt.3)**

ESERCIZIO 8. In $\tilde{\mathbb{E}}_3(\mathbb{C})$ dato il paraboloide $Q : (x+1)^2 + (z-2)^2 + y = 0$ si determini un piano α tale che $Q \cap \alpha$ sia una parabola.
Risposta $x = 0$ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 1^o appello 19/01/2016

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 9 & 1-k & 2k+1 & -6 \\ 3 & 0 & k & -2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k+1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.
  Risposta Per $k \neq 1$ compatibile con ∞^2 soluzioni. Per $k = 1$ incompatibile. **(pt.3)**
- Si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni ammette base.
  Risposta $k = -1$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. Dati $U = \mathcal{L}((4,1,0,0),(1,0,0,3))$ e $W = \{(c+b,a,b,0) \in \mathbb{R}^4 \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$, si determinino:

- una base di $U \cap W$
  Risposta $B_{U\cap W} = ((4,1,0,0))$ **(pt.3)**
- la dimensione di $U + W$.
  Risposta $dim(U+W) = 4$ **(pt.1)**

ESERCIZIO 3. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, si dica se il vettore $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un autovettore di A e, in caso affermativo, si determinino il relativo autovalore e l'autospazio al quale appartiene.
Risposta $\lambda = 3$, $\quad V_3 = \{(-3h,k,h,0) \in \mathbb{R}^4 | h,k \in \mathbb{R}\}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\mathbb{A}_3(\mathbb{C})$ si determini una base dello spazio di traslazione del piano $\alpha : ix + 2y - z + 1 - i = 0$.
Risposta $B = ((1,0,i),(0,1,2))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\tilde{\mathbb{E}}_2(\mathbb{C})$:

- si riconosca la conica $C : 4x^2 + 4y^2 - 2xy - 4x + 1 = 0$ e si determinino il centro, il fascio dei diametri e gli assi di C;
  Risposta Ellisse, centro $C = \left(\frac{8}{15}, \frac{2}{15}\right)$, fascio $(4x - y - 2)l + (-x + 4y)m = 0$, assi $3x + 3y - 2 = 0$, $5x - 5y - 2 = 0$ **(pt.4)**
- si determini il polo della retta $r : x - y = 0$ nella polarità indotta da C.
  Risposta $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 6. In $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ si determini un'equazione cartesiana di una sfera avente centro sulla retta $r : y - 2x = 0 = z + x$, tangente al piano $\alpha : y - 1 = 0$ e passante per $P = (1,0,0)$.
Risposta $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ oppure $(x+1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 9$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 7. In $\tilde{\mathbb{A}}_3(\mathbb{C})$ si consideri la retta $r : 2ix + y = 0 = (i+1)x + iz - 1$. Si dica, giustificando la risposta, se r ammette un punto reale.
Risposta Il determinante della matrice che ha nelle righe i coefficienti di r e $\bar{r}$ è non nullo, quindi la retta è immaginaria di seconda specie e non ha punti reali. **(pt.3)**

ESERCIZIO 8. In $\tilde{\mathbb{E}}_3(\mathbb{C})$ dato il paraboloide $Q : (y+3)^2 + (z+5)^2 + x = 0$ si determini un piano α tale che $Q \cap \alpha$ sia una parabola.
Risposta $y = 0$ **(pt.3)**