UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 5^o appello - 27/08/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Siano $U = \{(\beta, \alpha, 2\beta, 3\beta - 5\alpha) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ e $W_k = \mathcal{L}((0, -1, 0, k+1), (1, 0, k, 1), (1, -1, 2, 2k))$ due sottospazi di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.

Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- ogni complemento diretto di W_k in $\mathbb{R}^4$ ha dimensione 2;
  Risposta $k = 2$ **(pt.1A)**
- U è sottospazio di W_k.
  Risposta $k = 4$ **(pt.3A)**

Dato il vettore $\mathbf{v}_h = (h, 1, 0, 0)$ con $h \in \mathbb{R}$, determinare, se esistono, i valori reali di h e k per i quali $\mathbf{v}_h \in U \cap W_k$.
Risposta $\nexists h, k$ perché $\mathbf{v}_h \notin U$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ sia $A_k = \begin{pmatrix} k & 2 & 2k \\ 2 & k & 2k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $0, k-2, k+2$ **(pt.2A)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $\lambda = 0$ è un autovalore di molteplicità geometrica 1;
  Risposta $k \neq 2$ **(pt.2A)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile.
  Risposta $k = 0$ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 0 & -k & 1 \\ 0 & -4 & k \\ 1 & 2 & k+3 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k-2 \\ k-2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$ e, quando il sistema è compatibile, si determinino le soluzioni.
  Risposta Compatibile per $k \neq -2$.
  Se $k = 2$: $S_2 = \mathcal{L}((-12, 1, 2))$; se $k \neq \pm 2$: $S_k = \left\{ \left(-3, \frac{1}{k+2}, \frac{k}{k+2} \right) \right\}$ **(pt.3A)**
- Si determinino, se esistono, i valori del parametro reale k per cui l'insieme delle soluzioni è un sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$; nel caso non esistano di giustifichi la risposta.
  Risposta $k = 2$ **(pt.1A)**
- Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione del piano α_k, rappresentato dalla prima equazione del sistema, rispetto alla retta r_k, rappresentata dall'intersezione tra la seconda e la terza equazione del sistema, al variare di $k \in \mathbb{R}$.
  Risposta Se $k = -2$: r_{-2} e α_{-2} paralleli e disgiunti; se $k = 2$: $r_2 \subseteq \alpha_2$; se $k \neq \pm 2$: r_k incidente α_k **(pt.3G)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ sia $\mathcal{C}_k \ : \ (k+1)x^2 - 2(k+1)xy + y^2 + 2(2k+3)x - 6y + 8 = 0$, dove $k \in \mathbb{R}$.

- Si determini un'equazione cartesiana del luogo geometrico dei centri di $\mathcal{C}_k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.
  Risposta $y = 2$ **(pt.3G)**
- Posto $k = -1$, si riconosca $\mathcal{C}_{-1}$ e si scrivano le coordinate del centro e le equazioni degli assi, qualora esistano e siano reali.
  Risposta Parabola, $C_\infty = [(1, 0, 0)]$, $y = 3$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ si determini una rappresentazione cartesiana del luogo dei punti ottenuti dalla rotazione di $P = (0, 1, 1)$ attorno all'asse $a \ : \ x + z = 0 = x - y + 2z$.
Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0 = x - y - z + 2$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ dato il piano $\pi \ : \ 2x - y + z - 1 = 0$, si determini un'equazione cartesiana di una quadrica $\mathcal{Q}$ che contenga il piano π.
Risposta $2x^2 - xy + xz - x = 0$ **(pt.2G)**

Si determini il luogo dei punti doppi di $\mathcal{Q}$.
Risposta $2x - y + z - 1 = 0 = x$ **(pt.1G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 5^o appello - 27/08/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Siano $U = \{(\beta, \alpha, 2\beta, 3\beta - 5\alpha) \in \mathbb{R}^4 : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ e $W_k = \mathcal{L}((0,-1,0,k+2),(1,0,k+1,1),(1,-1,2,2k+2))$ due sottospazi di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.

Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- ogni complemento diretto di W_k in $\mathbb{R}^4$ ha dimensione 2;

  Risposta $k = 1$ **(pt.1A)**
- U è sottospazio di W_k.

  Risposta $k = 3$ **(pt.3A)**

Dato il vettore $\mathbf{v}_h = (h, 1, 0, 0)$ con $h \in \mathbb{R}$, determinare, se esistono, i valori reali di h e k per i quali $\mathbf{v}_h \in U \cap W_k$.

Risposta $\nexists h, k$ perché $\mathbf{v}_h \notin U$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ sia $A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 2 & 2k+2 \\ 2 & k+1 & 2k+2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $0, k-1, k+3$ **(pt.2A)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $\lambda = 0$ è un autovalore di molteplicità geometrica 1;

  Risposta $k \neq 1$ **(pt.2A)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile.

  Risposta $k = -1$ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2-k \\ 0 & k-2 & -4 \\ 1 & k+1 & 2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k-4 \\ k-4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$ e, quando il sistema è compatibile, si determinino le soluzioni.

  Risposta Compatibile per $k \neq 0$.
  Se $k = 4$: $S_4 = \mathcal{L}((-12, 2, 1))$; se $k \neq 0, 4$: $S_k = \left\{\left(-3, \frac{k-2}{k}, \frac{1}{k}\right)\right\}$ **(pt.3A)**
- Si determinino, se esistono, i valori del parametro reale k per cui l'insieme delle soluzioni è un sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$; nel caso non esistano di giustifichi la risposta.

  Risposta $k = 4$ **(pt.1A)**
- Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione del piano α_k, rappresentato dalla prima equazione del sistema, rispetto alla retta r_k, rappresentata dall'intersezione tra la seconda e la terza equazione del sistema, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

  Risposta Se $k = 0$: r_0 e α_0 paralleli e disgiunti; se $k = 4$: $r_4 \subseteq \alpha_4$; se $k \neq 0, 4$: r_k incidente α_k **(pt.3G)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ sia $\mathcal{C}_k : x^2 - 2(k+1)xy + (k+1)y^2 - 8x + 2(3k+4)y + 15 = 0$, dove $k \in \mathbb{R}$.

- Si determini un'equazione cartesiana del luogo geometrico dei centri di $\mathcal{C}_k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

  Risposta $x = 3$ **(pt.3G)**
- Posto $k = -1$, si riconosca $\mathcal{C}_{-1}$ e si scrivano le coordinate del centro e le equazioni degli assi, qualora esistano e siano reali.

  Risposta Parabola, $C_\infty = [(0, 1, 0)]$, $x = 4$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ si determini una rappresentazione cartesiana del luogo dei punti ottenuti dalla rotazione di $P = (-1, 0, 3)$ attorno all'asse $a : x + 2y = 0 = x + y - z$.

Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0 = 2x - y + z - 1$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ dato il piano $\pi : x + 3y - z + 2 = 0$, si determini un'equazione cartesiana di una quadrica $\mathcal{Q}$ che contenga il piano π.

Risposta $x^2 + 3xy - xz + 2x = 0$ **(pt.2G)**

Si determini il luogo dei punti doppi di $\mathcal{Q}$.

Risposta $x + 3y - z + 2 = 0 = x$ **(pt.1G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 5^o appello - 27/08/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Siano $U = \{(\beta, \alpha, 2\beta, 3\beta - 5\alpha) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ e $W_k = \mathcal{L}((0, -1, 0, k-1), (1, 0, k-2, 1), (1, -1, 2, 2k-4))$ due sottospazi di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.

Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- ogni complemento diretto di W_k in $\mathbb{R}^4$ ha dimensione 2;
  Risposta $k = 4$ ______ **(pt.1A)**
- U è sottospazio di W_k.
  Risposta $k = 6$ ______ **(pt.3A)**

Dato il vettore $\mathbf{v}_h = (h, 1, 0, 0)$ con $h \in \mathbb{R}$, determinare, se esistono, i valori reali di h e k per i quali $\mathbf{v}_h \in U \cap W_k$.

Risposta $\nexists h, k$ perché $\mathbf{v}_h \notin U$ ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ sia $A_k = \begin{pmatrix} -k & 2 & -2k \\ 2 & -k & -2k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $0, -k-2, -k+2$ ______ **(pt.2A)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $\lambda = 0$ è un autovalore di molteplicità geometrica 1;
  Risposta $k \neq -2$ ______ **(pt.2A)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile.
  Risposta $k = 0$ ______ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & -1-k & 0 \\ k+1 & -4 & 0 \\ k+4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$ e, quando il sistema è compatibile, si determinino le soluzioni.
  Risposta Compatibile per $k \neq -3$.
  Se $k = 1$: $S_1 = \mathcal{L}((2, 1, -12))$; se $k \neq -3, 1$: $S_k = \left\{ \left(\frac{k+1}{k+3}, \frac{1}{k+3}, -3 \right) \right\}$ ______ **(pt.3A)**
- Si determinino, se esistono, i valori del parametro reale k per cui l'insieme delle soluzioni è un sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$; nel caso non esistano di giustifichi la risposta.
  Risposta $k = 1$ ______ **(pt.1A)**
- Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione del piano α_k, rappresentato dalla prima equazione del sistema, rispetto alla retta r_k, rappresentata dall'intersezione tra la seconda e la terza equazione del sistema, al variare di $k \in \mathbb{R}$.
  Risposta Se $k = -3$: r_{-3} e α_{-3} paralleli e disgiunti; se $k = 1$: $r_1 \subseteq \alpha_1$; se $k \neq -3, 1$: r_k incidente α_k **(pt.3G)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ sia $\mathcal{C}_k \ : \ (k+1)x^2 - 2(k+1)xy + y^2 + 2(k+2)x - 4y + 3 = 0$, dove $k \in \mathbb{R}$.

- Si determini un'equazione cartesiana del luogo geometrico dei centri di $\mathcal{C}_k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.
  Risposta $y = 1$ ______ **(pt.3G)**
- Posto $k = -1$, si riconosca $\mathcal{C}_{-1}$ e si scrivano le coordinate del centro e le equazioni degli assi, qualora esistano e siano reali.
  Risposta Parabola, $C_\infty = [(1, 0, 0)]$, $y = 2$ ______ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ si determini una rappresentazione cartesiana del luogo dei punti ottenuti dalla rotazione di $P = (1, 1, 0)$ attorno all'asse $a \ : \ x + z = 0 = 2x - y + z$.

Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 2 = 0 = x + y - z - 2$ ______ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ dato il piano $\pi \ : \ x + y + 3z + 4 = 0$, si determini un'equazione cartesiana di una quadrica $\mathcal{Q}$ che contenga il piano π.

Risposta $x^2 + xy + 3xz + 4x = 0$ ______ **(pt.2G)**

Si determini il luogo dei punti doppi di $\mathcal{Q}$.

Risposta $x + y + 3z + 4 = 0 = x$ ______ **(pt.1G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 5^o appello - 27/08/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Siano $U = \{(\beta, \alpha, 2\beta, 3\beta - 5\alpha) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ e $W_k = \mathcal{L}((0, -1, 0, k+3), (1, 0, k+2, 1), (1, -1, 2, 2k+4))$ due sottospazi di $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$.

Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- ogni complemento diretto di W_k in $\mathbb{R}^4$ ha dimensione 2;

  Risposta $k = 0$ **(pt.1A)**
- U è sottospazio di W_k.

  Risposta $k = 2$ **(pt.3A)**

Dato il vettore $\mathbf{v}_h = (h, 1, 0, 0)$ con $h \in \mathbb{R}$, determinare, se esistono, i valori reali di h e k per i quali $\mathbf{v}_h \in U \cap W_k$.

Risposta $\nexists h, k$ perché $\mathbf{v}_h \notin U$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ sia $A_k = \begin{pmatrix} k-2 & 2 & 2k-4 \\ 2 & k-2 & 2k-4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $0, k-4, k$ **(pt.2A)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali $\lambda = 0$ è un autovalore di molteplicità geometrica 1;

  Risposta $k \neq 4$ **(pt.2A)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la matrice A_k è ortogonalmente diagonalizzabile.

  Risposta $k = 2$ **(pt.1A)**

ESERCIZIO 3. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1-k & 1 & 0 \\ -4 & k-1 & 0 \\ 2 & k+2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k-3 \\ k-3 \end{pmatrix}$, $\quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$ e, quando il sistema è compatibile, si determinino le soluzioni.

  Risposta Compatibile per $k \neq -1$.
  Se $k = 3$: $S_3 = \mathcal{L}((1, 2, -12))$; se $k \neq -1, 3$: $S_k = \left\{ \left(\frac{1}{k+1}, \frac{k-1}{k+1}, -3 \right) \right\}$ **(pt.3A)**
- Si determinino, se esistono, i valori del parametro reale k per cui l'insieme delle soluzioni è un sottospazio di $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$; nel caso non esistano di giustifichi la risposta.

  Risposta $k = 3$ **(pt.1A)**
- Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione del piano α_k, rappresentato dalla prima equazione del sistema, rispetto alla retta r_k, rappresentata dall'intersezione tra la seconda e la terza equazione del sistema, al variare di $k \in \mathbb{R}$.

  Risposta Se $k = -1$: r_{-1} e α_{-1} paralleli e disgiunti; se $k = 3$: $r_3 \subseteq \alpha_3$; se $k \neq -1, 3$: r_k incidente α_k **(pt.3G)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ sia $\mathcal{C}_k \ : \ x^2 - 2(k+1)xy + (k+1)y^2 - 6x + 2(2k+3)y + 8 = 0$, dove $k \in \mathbb{R}$.

- Si determini un'equazione cartesiana del luogo geometrico dei centri di $\mathcal{C}_k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

  Risposta $x = 2$ **(pt.3G)**
- Posto $k = -1$, si riconosca $\mathcal{C}_{-1}$ e si scrivano le coordinate del centro e le equazioni degli assi, qualora esistano e siano reali.

  Risposta Parabola, $C_\infty = [(0, 1, 0)]$, $x = 3$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{E}_3(\mathbb{R})$ si determini una rappresentazione cartesiana del luogo dei punti ottenuti dalla rotazione di $P = (3, 0, -1)$ attorno all'asse $a \ : \ 2y + z = 0 = x - y - z$.

Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0 = x - y + 2z - 1$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ dato il piano $\pi \ : \ x - y - z + 8 = 0$, si determini un'equazione cartesiana di una quadrica $\mathcal{Q}$ che contenga il piano π.

Risposta $x^2 - xy - xz + 8x = 0$ **(pt.2G)**

Si determini il luogo dei punti doppi di $\mathcal{Q}$.

Risposta $x - y - z + 8 = 0 = x$ **(pt.1G)**