UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 4^o appello - 19/06/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 2k & -1 & k \\ k-1 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 4k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile.
  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; se $k \neq 1$: ∞^2 soluzioni; se $k = 1$: ∞^3 soluzioni ________ **(pt.3A)**
- Posto $k = -1$:
  - si determini l'insieme S_{-1} delle soluzioni del sistema $A_{-1}X = B_{-1}$;
    Risposta $S_{-1} = \{(-2\alpha, -1-\alpha/2-\beta/2, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.2A)**
  - si determini la dimensione di $\mathcal{L}(S_{-1})$ e si stabilisca se il vettore $\mathbf{v} = (0,1,0,1)$ appartiene a $\mathcal{L}(S_{-1})$.
    Risposta $\dim\mathcal{L}(S_{-1}) = 3$; $\mathbf{v} \in \mathcal{L}(S_{-1})$ ________ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ siano $A_k = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & k \\ 3 & k & -1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $-2, -1-k, -1+k$ ________ **(pt.1A)**
- se possibile, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k e B sono simili. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ perché nei casi in cui le matrici hanno gli stessi autovalori, A_k non risulta diagonalizzabile _ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri la sequenza $A = ((1,2,0,1), (2,0,1,1), (2,-1,0,0))$. Si determini una base ortogonale di $\mathcal{L}(A)$ che contenga il maggior numero possibile di vettori di A.
Risposta $((1,2,0,1), (2,-1,0,0), (-1,-2,10,5))$ ________ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{\mathbb{A}}_3(\mathbb{C})$ si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la superficie $\mathcal{Q}_k$, descritta dalla retta $r_k \ : \ x + (2k+1)y - 2z = 0 = z + k - 1$ nella rotazione di asse $a_k \ : \ x + y - z - 1 = 0 = 2ky + z = 0$ sia una quadrica a punti semplici parabolici;
  Risposta $k = 0, 1/2$ ________ **(pt.3G)**
- posto $k = 1$, la proiezione ortogonale di r_1 sul piano $\pi \ : \ x + y - z - 1 = 0$.
  Risposta $x + y - z - 1 = 0 = x + 3y + 4z$ ________ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ dati il punto $P = (1,2)$ e la retta $r \ : \ x - 2y = 0$, si determini:

- il luogo dei punti la cui distanza da P è doppia della distanza da r;
  Risposta $x^2 + 16xy - 11y^2 - 10x - 20y + 25 = 0$ ________ **(pt.3G)**
- un'equazione cartesiana di una retta immaginaria passante per P. Nel caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.
  Risposta $x - iy - 1 + 2i = 0$ ________ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si considerino la sfera $\Sigma \ : \ x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 5 = 0$, il piano $\alpha \ : \ x + 2y + z + 2019 = 0$ e il piano $\pi_k \ : \ kx + y + kz - 1 = 0$, $k \in \mathbb{R}$.
Si determinino:

- i piani β paralleli ad α tali che la circonferenza $\mathcal{C} = \Sigma \cap \beta$ abbia raggio $\sqrt{\frac{29}{6}}$;
  Risposta $x + 2y + z + 2 = 0; x + 2y + z - 8 = 0$ ________ **(pt.3G)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la retta $r_k = \alpha \cap \pi_k$ è propria.
  Risposta $k \neq 1/2$ ________ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 4^o appello - 19/06/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 2k-4 & 0 & -1 & k-2 \\ 4 & k-3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 4k-8 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile.
  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; se $k \neq 3$: ∞^2 soluzioni; se $k = 3$: ∞^3 soluzioni **(pt.3A)**
- Posto $k = 1$:
  - si determini l'insieme S_1 delle soluzioni del sistema $A_1X = B_1$;
    Risposta $S_1 = \{(-1-\alpha/2-\beta/2, -2\alpha, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2A)**
  - si determini la dimensione di $\mathcal{L}(S_1)$ e si stabilisca se il vettore $\mathbf{v} = (1, 0, 2, 0)$ appartiene a $\mathcal{L}(S_1)$.
    Risposta $\dim\mathcal{L}(S_1) = 3$; $\mathbf{v} \notin \mathcal{L}(S_1)$ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ siano $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & k+1 \\ 3 & k+1 & -1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$ e $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $1, -2-k, k$ **(pt.1A)**
- se possibile, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k e B sono simili. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ perché nei casi in cui le matrici hanno gli stessi autovalori, A_k non risulta diagonalizzabile **(pt.3A)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri la sequenza $A = ((2, 1, 1, 0), (2, 0, 1, 1), (-1, 2, 0, 0))$. Si determini una base ortogonale di $\mathcal{L}(A)$ che contenga il maggior numero possibile di vettori di A.
Risposta $((2, 1, 1, 0), (-1, 2, 0, 0), (-2, -1, 5, 30))$ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{\mathbb{A}}_3(\mathbb{C})$ si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la superficie $\mathcal{Q}_k$, descritta dalla retta $r_k \ : \ 2x-(2k+7)y-z = 0 = x+k+2$ nella rotazione di asse $a_k \ : \ x-y-z+1 = 0 = 2ky+z = 0$ sia una quadrica a punti semplici parabolici;
  Risposta $k = -3, -1/4$ **(pt.3G)**
- posto $k = -2$, la proiezione ortogonale di r_{-2} sul piano $\pi \ : \ x+2y-z+1 = 0$.
  Risposta $x+2y-z+1 = 0 = 5x-3y-z$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ dati il punto $P = (1, 3)$ e la retta $r \ : \ x-y = 0$, si determini:

- il luogo dei punti la cui distanza da P è doppia della distanza da r;
  Risposta $x^2-4xy+y^2+2x+6y-10 = 0$ **(pt.3G)**
- un'equazione cartesiana di una retta immaginaria passante per P. Nel caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.
  Risposta $x-iy-1+3i = 0$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si considerino la sfera $\Sigma \ : \ x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+5 = 0$, il piano $\alpha \ : \ x+3y+z+2019 = 0$ e il piano $\pi_k \ : \ kx+y+kz-1 = 0$, $k \in \mathbb{R}$.
Si determinino:

- i piani β paralleli ad α tali che la circonferenza $\mathcal{C} = \Sigma \cap \beta$ abbia raggio $\sqrt{\frac{95}{11}}$;
  Risposta $x+3y+z = 0; x+3y+z-4 = 0$ **(pt.3G)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la retta $r_k = \alpha \cap \pi_k$ è propria.
  Risposta $k \neq 1/3$ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 4^o appello - 19/06/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -1 & 2k-6 & 0 & k-3 \\ -2 & 4 & k-4 & 2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 4k-12 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; se $k \neq 4$: ∞^2 soluzioni; se $k = 4$: ∞^3 soluzioni ______ **(pt.3A)**
- Posto $k = 2$:
  - si determini l'insieme S_2 delle soluzioni del sistema $A_2X = B_2$;

    Risposta $S_2 = \{(\alpha, -1-\alpha/2-\beta/2, -2\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2A)**
  - si determini la dimensione di $\mathcal{L}(S_2)$ e si stabilisca se il vettore $\mathbf{v} = (0, 1, 0, 1)$ appartiene a $\mathcal{L}(S_2)$.

    Risposta $\dim\mathcal{L}(S_2) = 3$; $\mathbf{v} \in \mathcal{L}(S_2)$ ______ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ siano $A_k = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & k+2 \\ 3 & k+2 & -1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$ e $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $3, -k-3, k+1$ ______ **(pt.1A)**
- se possibile, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k e B sono simili. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.

  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ perché nei casi in cui le matrici hanno gli stessi autovalori, A_k non risulta diagonalizzabile _ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri la sequenza $A = ((2, 1, 0, 1), (0, 2, 1, 1), (-1, 2, 0, 0))$. Si determini una base ortogonale di $\mathcal{L}(A)$ che contenga il maggior numero possibile di vettori di A.

Risposta $((2, 1, 0, 1), (-1, 2, 0, 0), (-2, -1, 10, 5))$ ______ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{\mathbb{A}}_3(\mathbb{C})$ si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la superficie $\mathcal{Q}_k$, descritta dalla retta $r_k \ : \ 2x-(2k-5)y-z = 0 = x+k-4$ nella rotazione di asse $a_k \ : \ x-y-z+1 = 0 = x+2(k-3)y = 0$ sia una quadrica a punti semplici parabolici;

  Risposta $k = 3, 7/2$ ______ **(pt.3G)**
- posto $k = 4$, la proiezione ortogonale di r_4 sul piano $\pi \ : \ x-y-z+1 = 0$.

  Risposta $x-y-z+1 = 0 = 4x+3y+z$ ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ dati il punto $P = (1, 1)$ e la retta $r \ : \ x+3y = 0$, si determini:

- il luogo dei punti la cui distanza da P è doppia della distanza da r;

  Risposta $3x^2-12xy-13y^2-10x-10y+10 = 0$ ______ **(pt.3G)**
- un'equazione cartesiana di una retta immaginaria passante per P. Nel caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.

  Risposta $x-iy-1+i = 0$ ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si considerino la sfera $\Sigma \ : \ x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+5 = 0$, il piano $\alpha \ : \ x-2y+z+2019 = 0$ e il piano $\pi_k \ : \ kx+y+kz-1 = 0$, $k \in \mathbb{R}$.

Si determinino:

- i piani β paralleli ad α tali che la circonferenza $\mathcal{C} = \Sigma \cap \beta$ abbia raggio $\sqrt{\frac{29}{6}}$;

  Risposta $x-2y+z-2 = 0; x-2y+z-12 = 0$ ______ **(pt.3G)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la retta $r_k = \alpha \cap \pi_k$ è propria.

  Risposta $k \neq -1/2$ ______ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 4^o appello - 19/06/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k+1 & 2k+2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & k \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 4k+4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile.
  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; se $k \neq 0$: ∞^2 soluzioni; se $k = 0$: ∞^3 soluzioni ______ **(pt.3A)**
- Posto $k = -2$:
  - si determini l'insieme S_{-2} delle soluzioni del sistema $A_{-2}X = B_{-2}$;
    Risposta $S_{-2} = \{(\beta, -1-\alpha/2-\beta/2, \alpha, -2\alpha) \in \mathbb{R}^4 \;:\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2A)**
  - si determini la dimensione di $\mathcal{L}(S_{-2})$ e si stabilisca se il vettore $\mathbf{v} = (0,1,2,0)$ appartiene a $\mathcal{L}(S_{-2})$.
    Risposta $\dim\mathcal{L}(S_{-2}) = 3$; $\mathbf{v} \notin \mathcal{L}(S_{-2})$ ______ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ siano $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & k-1 \\ 3 & k-1 & -1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$ e $B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $2, -k, k-2$ ______ **(pt.1A)**
- se possibile, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k e B sono simili. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ perché nei casi in cui le matrici hanno gli stessi autovalori, A_k non risulta diagonalizzabile _ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri la sequenza $A = ((1,1,0,2),(1,0,1,2),(0,2,0,-1))$. Si determini una base ortogonale di $\mathcal{L}(A)$ che contenga il maggior numero possibile di vettori di A.
Risposta $((1,1,0,2),(0,2,0,-1),(5,-1,30,-2))$ ______ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{\mathbb{A}}_3(\mathbb{C})$ si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la superficie $\mathcal{Q}_k$, descritta dalla retta $r_k \;:\; x-2y+(2k-3)z = 0 = y+k-3$ nella rotazione di asse $a_k \;:\; x-y+z-1 = 0 = y+2(k-2)z = 0$ sia una quadrica a punti semplici parabolici;
  Risposta $k = 2, 5/2$ ______ **(pt.3G)**
- posto $k = 3$, la proiezione ortogonale di r_3 sul piano $\pi \;:\; x-y-2z-1 = 0$.
  Risposta $x-y-2z-1 = 0 = x-5y+3z$ ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ dati il punto $P = (2,1)$ e la retta $r \;:\; 2x-y = 0$, si determini:

- il luogo dei punti la cui distanza da P è doppia della distanza da r;
  Risposta $11x^2-16xy-y^2+20x+10y-25 = 0$ ______ **(pt.3G)**
- un'equazione cartesiana di una retta immaginaria passante per P. Nel caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.
  Risposta $ix-y+1-2i = 0$ ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si considerino la sfera $\Sigma \;:\; x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+5 = 0$, il piano $\alpha \;:\; x-3y+z+2019 = 0$ e il piano $\pi_k \;:\; kx+y+kz-1 = 0$, $k \in \mathbb{R}$.
Si determinino:

- i piani β paralleli ad α tali che la circonferenza $\mathcal{C} = \Sigma \cap \beta$ abbia raggio $\sqrt{\frac{95}{11}}$;
  Risposta $x-3y+z-10 = 0; x-3y+z-6 = 0$ ______ **(pt.3G)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la retta $r_k = \alpha \cap \pi_k$ è propria.
  Risposta $k \neq -1/3$ ______ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 4^o appello - 19/06/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2k+4 & k+2 \\ k+1 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 4k+8 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile.
  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; se $k \neq -1$: ∞^2 soluzioni; se $k = -1$: ∞^3 soluzioni **(pt.3A)**
- Posto $k = -3$:
  - si determini l'insieme S_{-3} delle soluzioni del sistema $A_{-3}X = B_{-3}$;
    Risposta $S_{-3} = \{(-2\alpha, \alpha, -1-\alpha/2-\beta/2, \beta) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2A)**
  - si determini la dimensione di $\mathcal{L}(S_{-3})$ e si stabilisca se il vettore $\mathbf{v} = (0,0,1,1)$ appartiene a $\mathcal{L}(S_{-3})$.
    Risposta $\dim\mathcal{L}(S_{-3}) = 3$; $\mathbf{v} \in \mathcal{L}(S_{-3})$ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ siano $A_k = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & k-2 \\ 3 & k-2 & -1 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;
  Risposta $-3, 1-k, k-3$ **(pt.1A)**
- se possibile, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k e B sono simili. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.
  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ perché nei casi in cui le matrici hanno gli stessi autovalori, A_k non risulta diagonalizzabile **(pt.3A)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri la sequenza $A = ((0,2,1,1),(1,0,2,1),(0,-1,2,0))$. Si determini una base ortogonale di $\mathcal{L}(A)$ che contenga il maggior numero possibile di vettori di A.
Risposta $((0,2,1,1),(0,-1,2,0),(10,-2,-1,5))$ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{\mathbb{A}}_3(\mathbb{C})$ si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la superficie $\mathcal{Q}_k$, descritta dalla retta $r_k \ : \ x-2y+(2k+5)z = 0 = y+k+1$ nella rotazione di asse $a_k \ : \ x-y+z-1 = 0 = y+2(k+2)z = 0$ sia una quadrica a punti semplici parabolici;
  Risposta $k = -2, -3/2$ **(pt.3G)**
- posto $k = -1$, la proiezione ortogonale di r_{-1} sul piano $\pi \ : \ x-y+z-1 = 0$.
  Risposta $x-y+z-1 = 0 = x+4y+3z$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ dati il punto $P = (3,1)$ e la retta $r \ : \ x-y = 0$, si determini:

- il luogo dei punti la cui distanza da P è doppia della distanza da r;
  Risposta $x^2-4xy+y^2+6x+2y-10 = 0$ **(pt.3G)**
- un'equazione cartesiana di una retta immaginaria passante per P. Nel caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.
  Risposta $ix-y+1-3i = 0$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si considerino la sfera $\Sigma \ : \ x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+5 = 0$, il piano $\alpha \ : \ x+y+z+2019 = 0$ e il piano $\pi_k \ : \ kx+y+kz-1 = 0$, $k \in \mathbb{R}$.

Si determinino:

- i piani β paralleli ad α tali che la circonferenza $\mathcal{C} = \Sigma \cap \beta$ abbia raggio $\sqrt{\frac{11}{3}}$;
  Risposta $x+y+z = 0; x+y+z-8 = 0$ **(pt.3G)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la retta $r_k = \alpha \cap \pi_k$ è propria.
  Risposta $k \neq 1$ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 4^o appello - 19/06/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 0 & k+3 & -1 & 2k+6 \\ k+2 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 2 \\ 4k+12 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile.

  Risposta Compatibile $\forall k \in \mathbb{R}$; se $k \neq -2$: ∞^2 soluzioni; se $k = -2$: ∞^3 soluzioni ______ **(pt.3A)**
- Posto $k = -4$:
  - si determini l'insieme S_{-4} delle soluzioni del sistema $A_{-4}X = B_{-4}$;

    Risposta $S_{-4} = \{(-2\alpha, \beta, \alpha, -1 - \alpha/2 - \beta/2) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2A)**
  - si determini la dimensione di $\mathcal{L}(S_{-4})$ e si stabilisca se il vettore $\mathbf{v} = (0, 0, 2, 1)$ appartiene a $\mathcal{L}(S_{-4})$.

    Risposta $\dim\mathcal{L}(S_{-4}) = 3$; $\mathbf{v} \notin \mathcal{L}(S_{-4})$ ______ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ siano $A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & k \\ 3 & k & 2 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$ e $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Si determinino:

- gli autovalori di A_k;

  Risposta $-1, 2-k, 2+k$ ______ **(pt.1A)**
- se possibile, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui A_k e B sono simili. Qualora non sia possibile, si giustifichi la risposta.

  Risposta $\nexists k \in \mathbb{R}$ perché nei casi in cui le matrici hanno gli stessi autovalori, A_k non risulta diagonalizzabile _ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si consideri la sequenza $A = ((2, 1, 0, 1), (2, 0, 1, 1), (-1, 2, 0, 0))$. Si determini una base ortogonale di $\mathcal{L}(A)$ che contenga il maggior numero possibile di vettori di A.

Risposta $((2, 1, 0, 1), (-1, 2, 0, 0), (-2, -1, 30, 5))$ ______ **(pt.3A)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{\mathbb{A}}_3(\mathbb{C})$ si determinino:

- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la superficie $\mathcal{Q}_k$, descritta dalla retta $r_k \ : \ (2k-1)x + y - 2z = 0 = z + k - 2$ nella rotazione di asse $a_k \ : \ x + y - z - 1 = 0 = 2(k-1)x + z = 0$ sia una quadrica a punti semplici parabolici;

  Risposta $k = 1, 3/2$ ______ **(pt.3G)**
- posto $k = 2$, la proiezione ortogonale di r_2 sul piano $\pi \ : \ 2x - y + z + 1 = 0$.

  Risposta $2x - y + z + 1 = 0 = 3x + y - 5z$ ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ dati il punto $P = (1, 1)$ e la retta $r \ : \ 3x + y = 0$, si determini:

- il luogo dei punti la cui distanza da P è doppia della distanza da r;

  Risposta $13x^2 + 12xy - 3y^2 + 10x + 10y - 10 = 0$ ______ **(pt.3G)**
- un'equazione cartesiana di una retta immaginaria passante per P. Nel caso non sia possibile, si giustifichi la risposta.

  Risposta $ix - y + 1 - i = 0$ ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{R})$ si considerino la sfera $\Sigma \ : \ x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 5 = 0$, il piano $\alpha \ : \ x - y + z + 2019 = 0$ e il piano $\pi_k \ : \ kx + y + kz - 1 = 0$, $k \in \mathbb{R}$.

Si determinino:

- i piani β paralleli ad α tali che la circonferenza $\mathcal{C} = \Sigma \cap \beta$ abbia raggio $\sqrt{\frac{11}{3}}$;

  Risposta $x - y + z - 10 = 0; x - y + z - 2 = 0$ ______ **(pt.3G)**
- i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali la retta $r_k = \alpha \cap \pi_k$ è propria.

  Risposta $k \neq -1$ ______ **(pt.2G)**