UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 6/2/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determini una base di $U = \{(x, 2y - z + 5t, 2x + y + 3t, -x + 2z + 2t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x, y, z, t \in \mathbb{R}\}$.

Risposta $\mathcal{B}_U = ((1, 0, 2, -1), (0, 2, 1, 0), (0, -1, 0, 2))$ **(pt.2A)**

Si completi, se possibile, $A = ((0, 1, 4, 2), (1, 2, -3, 1))$ a base di U. Se non è possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta No, perché $(0, 1, 4, 2) \notin U$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 12 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 5 \end{pmatrix}$. Si determini per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la matrice A è simile a $B_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & k+2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Risposta $k = 3$ **(pt.2A)**

In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si determini, se esiste, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A. Qualora non sia possibile, lo si motivi.

Risposta Non esiste perché A non è simmetrica **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che il vettore $v_k = (k - 1, k + 2, -3k)$ sia la proiezione di v lungo $w = (1, 0, -2)$.

Risposta $k = -2$ **(pt.2A)**

Si determini la proiezione di $u = (0, 1, 1)$ lungo w.

Risposta $-\frac{2}{5}(1, 0, -2)$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 4. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k+3 & -k-4 & k+4 \\ 1 & k+6 & k+4 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k+3 \\ k+4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile.

  Risposta Compatibile per $k \neq -5, -4$, soluzione unica. **(pt.3A)**

- Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati ordinatamente dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro reale k.

  Risposta $k \neq -5, -4$: stella propria di piani; $k = -5$: piani incidenti solo a due a due; $k = -4$: α parallelo a β; γ incidente α e β. **(pt.3G)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{A}_3(\mathbb{C})$ si determini, se esiste, una retta immaginaria contenuta nel piano reale $\alpha \ : \ x - 3y + 7z + 2 = 0$.

Risposta $x - 3y + 7z + 2 = 0 = x - i$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$, data la conica $\mathcal{C}_k \ : \ (k + 1)x^2 - y^2 - (k + 2)y - k - 1 = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ha due punti impropri immaginari e coniugati;

  Risposta $k < -1$ **(pt.2G)**

- la retta $r \ : \ y - 4 = 0$ è tangente alla conica $\mathcal{C}_k$.

  Risposta $k = -5$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} \ : \ x^2 - z^2 + 4xy + 2y + 8z = 0$, stabilendo la natura dei suoi punti semplici.

Risposta Iperboloide iperbolico **(pt.3G)**

Dato il piano $\alpha \ : \ y - 1 = 0$, si riconosca l'intersezione $\mathcal{C} = \mathcal{Q} \cap \alpha$, determinandone le rette componenti nel caso in cui $\mathcal{C}$ sia riducibile.

Risposta Conica generale, iperbole **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 6/2/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determini una base di $U = \{(y+3z+t, 3z, 3x-2y-8t, -x+y-z+3t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x, y, z, t \in \mathbb{R}\}$.

Risposta $\mathcal{B}_U = ((0,0,3,-1),(1,0,-2,1),(3,3,0,-1))$ **(pt.2A)**

Si completi, se possibile, $A = ((4,3,-2,0),(0,0,1,5))$ a base di U. Se non è possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta No, perché $(0,0,1,5) \notin U$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 12 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 5 \end{pmatrix}$. Si determini per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la matrice A è simile a $B_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & k-4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Risposta $k = 9$ **(pt.2A)**

In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si determini, se esiste, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A. Qualora non sia possibile, lo si motivi.

Risposta Non esiste perché A non è simmetrica **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che il vettore $v_k = (-4-2k, k-1, k+7)$ sia la proiezione di v lungo $w = (3,0,-4)$.

Risposta $k = 1$ **(pt.2A)**

Si determini la proiezione di $u = (0,1,1)$ lungo w.

Risposta $-\frac{4}{25}(3,0,-4)$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 4. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k-1 & -k & k \\ 1 & k+2 & k \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k-1 \\ k \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile.

  Risposta Compatibile per $k \neq -1, 0$, soluzione unica. **(pt.3A)**

- Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati ordinatamente dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro reale k.

  Risposta $k \neq -1, 0$: stella propria di piani; $k = -1$: piani incidenti solo a due a due; $k = 0$: α parallelo a β; γ incidente α e β. **(pt.3G)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{A}_3(\mathbb{C})$ si determini, se esiste, una retta immaginaria contenuta nel piano reale $\alpha \ : \ x + 4y - z + 9 = 0$.

Risposta $x + 4y - z + 9 = 0 = x - i$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$, data la conica $\mathcal{C}_k \ : \ (k-3)x^2 - y^2 - (k-2)y - k + 3 = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ha due punti impropri immaginari e coniugati;

  Risposta $k < 3$ **(pt.2G)**

- la retta $r \ : \ y - 4 = 0$ è tangente alla conica $\mathcal{C}_k$.

  Risposta $k = -1$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} \ : \ x^2 + 8y^2 - 4yz - 2x - 2z = 0$, stabilendo la natura dei suoi punti semplici.

Risposta Iperboloide ellittico **(pt.3G)**

Dato il piano $\alpha \ : \ x - 1 = 0$, si riconosca l'intersezione $\mathcal{C} = \mathcal{Q} \cap \alpha$, determinandone le rette componenti nel caso in cui $\mathcal{C}$ sia riducibile.

Risposta Conica generale, iperbole **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 6/2/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determini una base di $U = \{(-x+2z+2t, 2y-z+5t, 2x+y+3t, x) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x, y, z, t \in \mathbb{R}\}$.

Risposta $\mathcal{B}_U = ((-1,0,2,1),(0,2,1,0),(2,-1,0,0))$ ______ **(pt.2A)**

Si completi, se possibile, $A = ((2,1,4,0),(1,2,-3,1))$ a base di U. Se non è possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta No, perché $(2,1,4,0) \notin U$ ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 12 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 5 \end{pmatrix}$. Si determini per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la matrice A è simile a $B_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & k+3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Risposta $k = 2$ ______ **(pt.2A)**

In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si determini, se esiste, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A. Qualora non sia possibile, lo si motivi.

Risposta Non esiste perché A non è simmetrica ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che il vettore $v_k = (3k, k-4, -k)$ sia la proiezione di v lungo $w = (-3,0,1)$.

Risposta $k = 4$ ______ **(pt.2A)**

Si determini la proiezione di $u = (0,1,1)$ lungo w.

Risposta $\frac{1}{10}(-3,0,1)$ ______ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 4. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k+1 & -k-2 & k+2 \\ 1 & k+4 & k+2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k+1 \\ k+2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_kX = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile.

  Risposta Compatibile per $k \neq -3, -2$, soluzione unica. ______ **(pt.3A)**

- Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati ordinatamente dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro reale k.

  Risposta $k \neq -3, -2$: stella propria di piani; $k = -3$: piani incidenti solo a due a due; $k = -2$: α parallelo a β; γ incidente α e β. ______ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{A}_3(\mathbb{C})$ si determini, se esiste, una retta immaginaria contenuta nel piano reale $\alpha \ : \ 7x - y + z + 1 = 0$.

Risposta $7x - y + z + 1 = 0 = x - i$ ______ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$, data la conica $\mathcal{C}_k \ : \ (k+6)x^2 - y^2 - (k+7)y - k - 6 = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ha due punti impropri immaginari e coniugati;

  Risposta $k < -6$ ______ **(pt.2G)**

- la retta $r \ : \ y - 4 = 0$ è tangente alla conica $\mathcal{C}_k$.

  Risposta $k = -10$ ______ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} \ : \ x^2 - y^2 - 4yz - 8x - 2z = 0$, stabilendo la natura dei suoi punti semplici.

Risposta Iperboloide iperbolico ______ **(pt.3G)**

Dato il piano $\alpha \ : \ y - 1 = 0$, si riconosca l'intersezione $\mathcal{C} = \mathcal{Q} \cap \alpha$, determinandone le rette componenti nel caso in cui $\mathcal{C}$ sia riducibile.

Risposta Conica generale, parabola ______ **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 6/2/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determini una base di $U = \{(y+3z+t, 3z, -x+y-z+3t, 3x-2y-8t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x,y,z,t \in \mathbb{R}\}$.

Risposta $\mathcal{B}_U = ((0,0,-1,3),(1,0,1,-2),(3,3,-1,0))$ **(pt.2A)**

Si completi, se possibile, $A = ((4,3,0,-2),(0,0,5,1))$ a base di U. Se non è possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta No, perché $(0,0,5,1) \notin U$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 12 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 5 \end{pmatrix}$. Si determini per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la matrice A è simile a $B_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & k-2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Risposta $k = 7$ **(pt.2A)**

In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si determini, se esiste, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A. Qualora non sia possibile, lo si motivi.

Risposta Non esiste perché A non è simmetrica **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che il vettore $v_k = (k+3, k, -3k-3)$ sia la proiezione di v lungo $w = (0,1,-2)$.

Risposta $k = -3$ **(pt.2A)**

Si determini la proiezione di $u = (1,0,1)$ lungo w.

Risposta $-\frac{2}{5}(0,1,-2)$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 4. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & -k-1 & k+1 \\ 1 & k+3 & k+1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ k+1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile.

  Risposta Compatibile per $k \neq -2, -1$, soluzione unica. **(pt.3A)**

- Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati ordinatamente dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro reale k.

  Risposta $k \neq -2, -1$: stella propria di piani; $k = -2$: piani incidenti solo a due a due; $k = -1$: α parallelo a β; γ incidente α e β. **(pt.3G)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{A}_3(\mathbb{C})$ si determini, se esiste, una retta immaginaria contenuta nel piano reale $\alpha \ : \ 2x - 4y - 6z + 11 = 0$.

Risposta $2x - 4y - 6z + 11 = 0 = x - i$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$, data la conica $\mathcal{C}_k \ : \ (k-2)x^2 - y^2 - (k-1)y - k + 2 = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ha due punti impropri immaginari e coniugati;

  Risposta $k < 2$ **(pt.2G)**

- la retta $r \ : \ y - 4 = 0$ è tangente alla conica $\mathcal{C}_k$.

  Risposta $k = -2$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} \ : \ 8x^2 + y^2 - 4xz - 2y - 2z = 0$, stabilendo la natura dei suoi punti semplici.

Risposta Iperboloide ellittico **(pt.3G)**

Dato il piano $\alpha \ : \ x - 2 = 0$, si riconosca l'intersezione $\mathcal{C} = \mathcal{Q} \cap \alpha$, determinandone le rette componenti nel caso in cui $\mathcal{C}$ sia riducibile.

Risposta Conica generale, parabola **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 6/2/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determini una base di $U = \{(x, 2x + y + 3t, 2y - z + 5t, -x + 2z + 2t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x, y, z, t \in \mathbb{R}\}$.

Risposta $\mathcal{B}_U = ((1, 2, 0, -1), (0, 1, 2, 0), (0, 0, -1, 2))$ **(pt.2A)**

Si completi, se possibile, $A = ((0, 4, 1, 2), (1, -3, 2, 1))$ a base di U. Se non è possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta No, perché $(0, 4, 1, 2) \notin U$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 12 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 5 \end{pmatrix}$. Si determini per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la matrice A è simile a $B_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & k+5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Risposta $k = 0$ **(pt.2A)**

In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si determini, se esiste, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A. Qualora non sia possibile, lo si motivi.

Risposta Non esiste perché A non è simmetrica **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che il vettore $v_k = (k - 2, -2k - 2, k + 6)$ sia la proiezione di v lungo $w = (0, 3, -4)$.

Risposta $k = 2$ **(pt.2A)**

Si determini la proiezione di $u = (1, 0, 1)$ lungo w.

Risposta $-\frac{4}{25}(0, 3, -4)$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 4. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k-4 & 3-k & k-3 \\ 1 & k-1 & k-3 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k-4 \\ k-3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile.

  Risposta Compatibile per $k \neq 2, 3$, soluzione unica. **(pt.3A)**

- Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati ordinatamente dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro reale k.

  Risposta $k \neq 2, 3$: stella propria di piani; $k = 2$: piani incidenti solo a due a due; $k = 3$: α parallelo a β; γ incidente α e β. **(pt.3G)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{A}_3(\mathbb{C})$ si determini, se esiste, una retta immaginaria contenuta nel piano reale $\alpha \ : \ x - y + z + 12 = 0$.

Risposta $x - y + z + 12 = 0 = x - i$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$, data la conica $\mathcal{C}_k \ : \ (k + 3)x^2 - y^2 - (k + 4)y - k - 3 = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ha due punti impropri immaginari e coniugati;

  Risposta $k < -3$ **(pt.2G)**

- la retta $r \ : \ y - 4 = 0$ è tangente alla conica $\mathcal{C}_k$.

  Risposta $k = -7$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} \ : \ x^2 - z^2 + 4xy + 2y + 8z = 0$, stabilendo la natura dei suoi punti semplici.

Risposta Iperboloide iperbolico **(pt.3G)**

Dato il piano $\alpha \ : \ 2x + y = 0$, si riconosca l'intersezione $\mathcal{C} = \mathcal{Q} \cap \alpha$, determinandone le rette componenti nel caso in cui $\mathcal{C}$ sia riducibile.

Risposta Conica generale, ellisse **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 6/2/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determini una base di $U = \{(-x+y-z+3t, 3z, 3x-2y-8t, y+3z+t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x, y, z, t \in \mathbb{R}\}$.
Risposta $\mathcal{B}_U = ((-1,0,3,0),(1,0,-2,1),(-1,3,0,3))$ **(pt.2A)**
Si completi, se possibile, $A = ((0,3,-2,4),(5,0,1,0))$ a base di U. Se non è possibile, si giustifichi la risposta.
Risposta No, perché $(5,0,1,0) \notin U$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 12 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 5 \end{pmatrix}$. Si determini per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la matrice A è simile a $B_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & k-3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Risposta $k = 8$ **(pt.2A)**
In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si determini, se esiste, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A. Qualora non sia possibile, lo si motivi.
Risposta Non esiste perché A non è simmetrica **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che il vettore $v_k = (k-5, 3k-3, 1-k)$ sia la proiezione di v lungo $w = (0,-3,1)$.
Risposta $k = 5$ **(pt.2A)**
Si determini la proiezione di $u = (1,0,1)$ lungo w.
Risposta $\frac{1}{10}(0,-3,1)$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 4. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k+4 & -k-5 & k+5 \\ 1 & k+7 & k+5 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k+4 \\ k+5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile.
  Risposta Compatibile per $k \neq -6, -5$, soluzione unica. **(pt.3A)**
- Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati ordinatamente dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro reale k.
  Risposta $k \neq -6, -5$: stella propria di piani; $k = -6$: piani incidenti solo a due a due; $k = -5$: α parallelo a β; γ incidente α e β. **(pt.3G)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{A}_3(\mathbb{C})$ si determini, se esiste, una retta immaginaria contenuta nel piano reale $\alpha \ : \ 6x+3y-5z-1=0$.
Risposta $6x+3y-5z-1=0=x-i$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$, data la conica $\mathcal{C}_k \ : \ kx^2 - y^2 - (k+1)y - k = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ha due punti impropri immaginari e coniugati;
  Risposta $k < 0$ **(pt.2G)**
- la retta $r \ : \ y - 4 = 0$ è tangente alla conica $\mathcal{C}_k$.
  Risposta $k = -4$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} \ : \ 8x^2 + z^2 - 4xy - 2y - 2z = 0$, stabilendo la natura dei suoi punti semplici.
Risposta Iperboloide ellittico **(pt.3G)**
Dato il piano $\alpha \ : \ x - 2 = 0$, si riconosca l'intersezione $\mathcal{C} = \mathcal{Q} \cap \alpha$, determinandone le rette componenti nel caso in cui $\mathcal{C}$ sia riducibile.
Risposta Conica generale, parabola **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 6/2/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determini una base di $U = \{(x, 2y - z + 5t, -x + 2z + 2t, 2x + y + 3t) \in \mathbb{R}^4 \;:\; x, y, z, t \in \mathbb{R}\}$.

Risposta $\mathcal{B}_U = ((1, 0, -1, 2), (0, 2, 0, 1), (0, -1, 2, 0))$ **(pt.2A)**

Si completi, se possibile, $A = ((0, 1, 2, 4), (1, 2, 1, -3))$ a base di U. Se non è possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta No, perché $(0, 1, 2, 4) \notin U$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 12 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 5 \end{pmatrix}$. Si determini per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la matrice A è simile a $B_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & k+1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Risposta $k = 4$ **(pt.2A)**

In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si determini, se esiste, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A. Qualora non sia possibile, lo si motivi.

Risposta Non esiste perché A non è simmetrica **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che il vettore $v_k = (3 - 3k, k + 1, k - 2)$ sia la proiezione di v lungo $w = (-2, 0, 1)$.

Risposta $k = -1$ **(pt.2A)**

Si determini la proiezione di $u = (1, 1, 0)$ lungo w.

Risposta $-\frac{2}{5}(-2, 0, 1)$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 4. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k-2 & -k+1 & k-1 \\ 1 & k+1 & k-1 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k-2 \\ k-1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile.

  Risposta Compatibile per $k \neq 0, 1$, soluzione unica. **(pt.3A)**

- Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati ordinatamente dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro reale k.

  Risposta $k \neq 0, 1$: stella propria di piani; $k = 0$: piani incidenti solo a due a due; $k = 1$: α parallelo a β; γ incidente α e β. **(pt.3G)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{A}_3(\mathbb{C})$ si determini, se esiste, una retta immaginaria contenuta nel piano reale $\alpha \;:\; 2x - 4y - 7z + 6 = 0$.

Risposta $2x - 4y - 7z + 6 = 0 = x - i$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$, data la conica $\mathcal{C}_k \;:\; (k+4)x^2 - y^2 - (k+5)y - k - 4 = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ha due punti impropri immaginari e coniugati;

  Risposta $k < -4$ **(pt.2G)**

- la retta $r \;:\; y - 4 = 0$ è tangente alla conica $\mathcal{C}_k$.

  Risposta $k = -8$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} \;:\; y^2 - z^2 - 4xz - 2x - 8y = 0$, stabilendo la natura dei suoi punti semplici.

Risposta Iperboloide iperbolico **(pt.3G)**

Dato il piano $\alpha \;:\; y - 1 = 0$, si riconosca l'intersezione $\mathcal{C} = \mathcal{Q} \cap \alpha$, determinandone le rette componenti nel caso in cui $\mathcal{C}$ sia riducibile.

Risposta Conica generale, iperbole **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 6/2/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determini una base di $U = \{(y+3z+t, 3x-2y-8t, 3z, -x+y-z+3t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x,y,z,t \in \mathbb{R}\}$.

Risposta $\mathcal{B}_U = ((0,3,0,-1),(1,-2,0,1),(3,0,3,-1))$ **(pt.2A)**

Si completi, se possibile, $A = ((4,-2,3,0),(0,1,0,5))$ a base di U. Se non è possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta No, perché $(0,1,0,5) \notin U$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 12 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 5 \end{pmatrix}$. Si determini per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la matrice A è simile a $B_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & k+4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Risposta $k = 1$ **(pt.2A)**

In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si determini, se esiste, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A. Qualora non sia possibile, lo si motivi.

Risposta Non esiste perché A non è simmetrica **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che il vettore $v_k = (k+5, k-3, -2k)$ sia la proiezione di v lungo $w = (-4,0,3)$.

Risposta $k = 3$ **(pt.2A)**

Si determini la proiezione di $u = (1,1,0)$ lungo w.

Risposta $-\frac{4}{25}(-4,0,3)$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 4. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k+2 & -k-3 & k+3 \\ 1 & k+5 & k+3 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k+2 \\ k+3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile.

  Risposta Compatibile per $k \neq -4, -3$, soluzione unica. **(pt.3A)**

- Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati ordinatamente dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro reale k.

  Risposta $k \neq -4, -3$: stella propria di piani; $k = -4$: piani incidenti solo a due a due; $k = -3$: α parallelo a β; γ incidente α e β. **(pt.3G)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{A}_3(\mathbb{C})$ si determini, se esiste, una retta immaginaria contenuta nel piano reale $\alpha \ : \ 2x - 2y + 3z + 3 = 0$.

Risposta $2x - 2y + 3z + 3 = 0 = x - i$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$, data la conica $\mathcal{C}_k \ : \ (k-1)x^2 - y^2 - ky - k + 1 = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ha due punti impropri immaginari e coniugati;

  Risposta $k < 1$ **(pt.2G)**

- la retta $r \ : \ y - 4 = 0$ è tangente alla conica $\mathcal{C}_k$.

  Risposta $k = -3$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} \ : \ y^2 + 8z^2 - 4xz - 2x - 2y = 0$, stabilendo la natura dei suoi punti semplici.

Risposta Iperboloide ellittico **(pt.3G)**

Dato il piano $\alpha \ : \ 2x + y = 0$, si riconosca l'intersezione $\mathcal{C} = \mathcal{Q} \cap \alpha$, determinandone le rette componenti nel caso in cui $\mathcal{C}$ sia riducibile.

Risposta Conica generale, ellisse **(pt.2G)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o appello - 6/2/2019

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ si determini una base di $U = \{(2x+y+3t, 2y-z+5t, x, -x+2z+2t) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x,y,z,t \in \mathbb{R}\}$.

Risposta $\mathcal{B}_U = ((2,0,1,-1),(1,2,0,0),(0,-1,0,2))$ **(pt.2A)**

Si completi, se possibile, $A = ((4,1,0,2),(-3,2,1,1))$ a base di U. Se non è possibile, si giustifichi la risposta.

Risposta No, perché $(4,1,0,2) \notin U$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 12 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 5 \end{pmatrix}$. Si determini per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ la matrice A è simile a $B_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 6 & k+6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Risposta $k = -1$ **(pt.2A)**

In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si determini, se esiste, una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A. Qualora non sia possibile, lo si motivi.

Risposta Non esiste perché A non è simmetrica **(pt.2A)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si determini per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ tale che il vettore $v_k = (2-k, k-6, 3k-6)$ sia la proiezione di v lungo $w = (1,0,-3)$.

Risposta $k = 6$ **(pt.2A)**

Si determini la proiezione di $u = (1,1,0)$ lungo w.

Risposta $\frac{1}{10}(1,0,-3)$ **(pt.2A)**

ESERCIZIO 4. Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k-3 & -k+2 & k-2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix}$, $B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ k-3 \\ k-2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si studi, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità del sistema $A_k X = B_k$, precisando il numero di soluzioni nei casi in cui il sistema risulta compatibile.

  Risposta Compatibile per $k \neq 1, 2$, soluzione unica. **(pt.3A)**

- Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$ si dica qual è la mutua posizione dei tre piani α, β, γ rappresentati ordinatamente dalle tre equazioni del sistema al variare del parametro reale k.

  Risposta $k \neq 1, 2$: stella propria di piani; $k = 1$: piani incidenti solo a due a due; $k = 2$: α parallelo a β; γ incidente α e β. **(pt.3G)**

ESERCIZIO 5. In $\mathbb{A}_3(\mathbb{C})$ si determini, se esiste, una retta immaginaria contenuta nel piano reale $\alpha \ : \ 7x - y + z + 7 = 0$.

Risposta $7x - y + z + 7 = 0 = x - i$ **(pt.2G)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$, data la conica $\mathcal{C}_k \ : \ (k+2)x^2 - y^2 - (k+3)y - k - 2 = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ha due punti impropri immaginari e coniugati;

  Risposta $k < -2$ **(pt.2G)**

- la retta $r \ : \ y - 4 = 0$ è tangente alla conica $\mathcal{C}_k$.

  Risposta $k = -6$ **(pt.3G)**

ESERCIZIO 7. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} \ : \ x^2 - y^2 + 4xz + 8y + 2z = 0$, stabilendo la natura dei suoi punti semplici.

Risposta Iperboloide iperbolico **(pt.3G)**

Dato il piano $\alpha \ : \ x - 1 = 0$, si riconosca l'intersezione $\mathcal{C} = \mathcal{Q} \cap \alpha$, determinandone le rette componenti nel caso in cui $\mathcal{C}$ sia riducibile.

Risposta Conica generale, parabola **(pt.2G)**