# UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - $1^o$ appello - 16/01/2019

| COGNOME | NOME |
|---|---|
| CORSO DI LAUREA | MATRICOLA |

**ESERCIZIO 1.** Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k+2 & -2 & -1 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -k & 2-k \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui l'insieme $S$ delle soluzioni di $A_kX = 0$ ha dimensione maggiore o uguale a 1.
  **Risposta** $\forall k \in \mathbb{R}$ **(pt.2A)**
- Posto $k = 0$, si scrivano:
  - l'insieme $S$ delle soluzioni di $A_0X = 0$;
    **Risposta** $\{(-\alpha, \beta, \beta - \alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2A)**
  - una base e la dimensione di $S$.
    **Risposta** $\dim S = 2$, $\mathcal{B}_S = ((1, 0, 1, -1), (0, 1, 1, 0))$ **(pt.2A)**

**ESERCIZIO 2.** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si considerino il vettore $\mathbf{v}_k = (2-2k, k-1, k-1, k)$ e la sequenza $S_k = ((k, 0, 4, 0), (k, 2, k, 0), (k+1, 2, 2k, 0))$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathbf{v}_k \in \mathcal{L}(S_k)$;
  **Risposta** $k = 0$ **(pt.2A)**
- $\mathbf{v}_k \in \mathcal{L}(S_k)^\perp$.
  **Risposta** $k = 1, 2$ **(pt.2A)**

**ESERCIZIO 3.** In $M_3(\mathbb{R})$ sia $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & k-1 & 1-k \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:

- $A_k$ è ortogonale;
  **Risposta** $k = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ **(pt.3A)**
- il vettore $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ è un autovettore di $A_k$.
  **Risposta** $k = 1$ **(pt.2A)**

**ESERCIZIO 4.** In $\widetilde{\mathbb{A}}_3(\mathbb{C})$ si considerino le rette $r \ : \ x + y - 1 = 0 = 3x + z$ e $s \ : \ 2y - z - 1 = 0 = x + y - 2$ e il punto $P = (1, 0, 2)$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana della retta $l$ passante per $P$ e incidente $r$ ed $s$;
  **Risposta** $x + y - 1 = 0 = 3x + y + z - 5$ **(pt.3G)**
- i punti di intersezione tra $l$ ed $r$ e tra $l$ ed $s$.
  **Risposta** $(-4, 5, 12)$, $[(-1, 1, 2, 0)]$ **(pt.2G)**

**ESERCIZIO 5.** In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k \ : \ 4x^2 + 2kxy - ky^2 + 2ky + 4 = 0$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ammette un solo asse e si scriva un'equazione cartesiana di tale asse;
  **Risposta** $k = -4$, $2x - 2y + 1 = 0$ **(pt.3G)**
- la retta $r :\ 4x + 3y - 2 = 0$ è la polare del punto $P = (-2, 0)$ nella polarità indotta da $\mathcal{C}_k$.
  **Risposta** $k = 6$ **(pt.2G)**

**ESERCIZIO 6.** In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ è data la quadrica $\mathcal{Q} \ : \ x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4xz + 2y = 0$.

- Si riconosca $\mathcal{Q}$, precisando la natura dei suoi punti semplici.
  **Risposta** Ellissoide, punti semplici ellittici **(pt.2G)**
- Si determinino, se esistono, un piano $\alpha$ tale che $\mathcal{Q} \cap \alpha$ sia un'iperbole e un piano $\beta$ tale che $\mathcal{Q} \cap \beta$ sia un'ellisse; in caso non esistano si giustifichi la risposta.
  **Risposta** $\nexists \alpha$ poiché le sezioni piane irriducibili di un ellissoide sono tutte ellissi, $\beta \ : \ x = 0$ **(pt.3G)**

# UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - $1^o$ appello - 16/01/2019

| | |
|---|---|
| COGNOME | NOME |
| CORSO DI LAUREA | MATRICOLA |

**ESERCIZIO 1.** Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 4 & 4k & 0 & -4k-4 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui l'insieme $S$ delle soluzioni di $A_k X = 0$ ha dimensione maggiore o uguale a 1.
  **Risposta** $\forall k \in \mathbb{R}$ **(pt.2A)**
- Posto $k = -2$, si scrivano:
  - l'insieme $S$ delle soluzioni di $A_{-2}X = 0$;
    **Risposta** $\{(\alpha, \beta, 0, 2\beta - \alpha) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2A)**
  - una base e la dimensione di $S$.
    **Risposta** $\dim S = 2$, $\mathcal{B}_S = ((1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 2))$ **(pt.2A)**

**ESERCIZIO 2.** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si considerino il vettore $\mathbf{v}_k = (-4 - 2k, k + 2, k + 2, k + 3)$ e la sequenza $S_k = ((k + 3, 0, 4, 0), (k + 3, 2, k + 3, 0), (k + 4, 2, 2k + 6, 0))$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathbf{v}_k \in \mathcal{L}(S_k)$;
  **Risposta** $k = -3$ **(pt.2A)**
- $\mathbf{v}_k \in \mathcal{L}(S_k)^\perp$.
  **Risposta** $k = -2, -1$ **(pt.2A)**

**ESERCIZIO 3.** In $M_3(\mathbb{R})$ sia $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k-6 & k-6 \\ 0 & k-6 & 6-k \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:

- $A_k$ è ortogonale;
  **Risposta** $k = 6 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ **(pt.3A)**
- il vettore $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ è un autovettore di $A_k$.
  **Risposta** $k = 6$ **(pt.2A)**

**ESERCIZIO 4.** In $\widetilde{\mathbb{A}}_3(\mathbb{C})$ si considerino le rette $r \ : \ x + 3y - 1 = 0 = x + z$ e $s \ : \ y - z - 1 = 0 = x + 3y + 2$ e il punto $P = (1, 0, 2)$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana della retta $l$ passante per $P$ e incidente $r$ ed $s$;
  **Risposta** $x + 3y - 1 = 0 = x + 4y - z + 1$ **(pt.3G)**
- i punti di intersezione tra $l$ ed $r$ e tra $l$ ed $s$.
  **Risposta** $(-7/2, 3/2, 7/2)$, $[(-3, 1, 1, 0)]$ **(pt.2G)**

**ESERCIZIO 5.** In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k \ : \ 4x^2 - 2(k - 4)xy - (k - 4)y^2 - 2(k - 4)y + 4 = 0$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ammette un solo asse e si scriva un'equazione cartesiana di tale asse;
  **Risposta** $k = 0$, $2x + 2y + 1 = 0$ **(pt.3G)**
- la retta $r : \ 4x - 3y - 2 = 0$ è la polare del punto $P = (-2, 0)$ nella polarità indotta da $\mathcal{C}_k$.
  **Risposta** $k = 10$ **(pt.2G)**

**ESERCIZIO 6.** In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ è data la quadrica $\mathcal{Q} \ : \ x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 4xy + 2z = 0$.

- Si riconosca $\mathcal{Q}$, precisando la natura dei suoi punti semplici.
  **Risposta** Ellissoide, punti semplici ellittici **(pt.2G)**
- Si determinino, se esistono, un piano $\alpha$ tale che $\mathcal{Q} \cap \alpha$ sia una parabola e un piano $\beta$ tale che $\mathcal{Q} \cap \beta$ sia un'ellisse; in caso non esistano si giustifichi la risposta.
  **Risposta** $\nexists \alpha$ poiché le sezioni piane irriducibili di un ellissoide sono tutte ellissi, $\beta \ : \ x = 0$ **(pt.3G)**

# UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - $1^o$ appello - 16/01/2019

| COGNOME | NOME |
| --- | --- |
| CORSO DI LAUREA | MATRICOLA |

**ESERCIZIO 1.** Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} k+2 & 1 & -2 & -1 \\ k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -k & 2-k \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui l'insieme $S$ delle soluzioni di $A_kX = 0$ ha dimensione maggiore o uguale a 1.
  **Risposta** $\forall k \in \mathbb{R}$ **(pt.2A)**
- Posto $k = 0$, si scrivano:
  - l'insieme $S$ delle soluzioni di $A_0X = 0$;
    **Risposta** $\{(\beta, -\alpha, \beta - \alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2A)**
  - una base e la dimensione di $S$.
    **Risposta** $\dim S = 2$, $\mathcal{B}_S = ((0, 1, 1, -1), (1, 0, 1, 0))$ **(pt.2A)**

**ESERCIZIO 2.** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si considerino il vettore $\mathbf{v}_k = (8-2k, k-4, k-4, k-3)$ e la sequenza $S_k = ((k-3, 0, 4, 0), (k-3, 2, k-3, 0), (k-2, 2, 2k-6, 0))$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathbf{v}_k \in \mathcal{L}(S_k)$;
  **Risposta** $k = 3$ **(pt.2A)**
- $\mathbf{v}_k \in \mathcal{L}(S_k)^\perp$.
  **Risposta** $k = 4, 5$ **(pt.2A)**

**ESERCIZIO 3.** In $M_3(\mathbb{R})$ sia $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k-4 & k-4 \\ 0 & k-4 & 4-k \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:

- $A_k$ è ortogonale;
  **Risposta** $k = 4 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ **(pt.3A)**
- il vettore $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ è un autovettore di $A_k$.
  **Risposta** $k = 4$ **(pt.2A)**

**ESERCIZIO 4.** In $\widetilde{\mathbb{A}}_3(\mathbb{C})$ si considerino le rette $r \ : \ 2x - y + 4 = 0 = x + 3z$ e $s \ : \ y + z + 3 = 0 = 2x - y + 5$ e il punto $P = (-2, 0, 1)$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana della retta $l$ passante per $P$ e incidente $r$ ed $s$;
  **Risposta** $2x - y + 4 = 0 = 8x - 5y - z + 17$ **(pt.3G)**
- i punti di intersezione tra $l$ ed $r$ e tra $l$ ed $s$.
  **Risposta** $(-9/5, 2/5, 3/5)$, $[(1, 2, -2, 0)]$ **(pt.2G)**

**ESERCIZIO 5.** In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k \ : \ 4x^2 + 2(k+3)xy - (k+3)y^2 + 2(k+3)x + 7 + k = 0$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ammette un solo asse e si scriva un'equazione cartesiana di tale asse;
  **Risposta** $k = -7$, $2x - 2y - 1 = 0$ **(pt.3G)**
- la retta $r: \ 4x + 3y + 1 = 0$ è la polare del punto $P = (-2, -1)$ nella polarità indotta da $\mathcal{C}_k$.
  **Risposta** $k = 3$ **(pt.2G)**

**ESERCIZIO 6.** In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ è data la quadrica $\mathcal{Q} \ : \ 2x^2 + y^2 + 5z^2 + 4yz + 2x = 0$.

- Si riconosca $\mathcal{Q}$, precisando la natura dei suoi punti semplici.
  **Risposta** Ellissoide, punti semplici ellittici **(pt.2G)**
- Si determinino, se esistono, un piano $\alpha$ tale che $\mathcal{Q} \cap \alpha$ sia un'iperbole e un piano $\beta$ tale che $\mathcal{Q} \cap \beta$ sia un'ellisse; in caso non esistano si giustifichi la risposta.
  **Risposta** $\nexists \alpha$ poiché le sezioni piane irriducibili di un ellissoide sono tutte ellissi, $\beta \ : \ y = 0$ **(pt.3G)**

# UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - $1^o$ appello - 16/01/2019

| COGNOME | NOME |
|---|---|
| CORSO DI LAUREA | MATRICOLA |

**ESERCIZIO 1.** Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 4k & 4 & 0 & -4k-4 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui l'insieme $S$ delle soluzioni di $A_kX = 0$ ha dimensione maggiore o uguale a 1.
  **Risposta** $\forall k \in \mathbb{R}$ **(pt.2A)**
- Posto $k = -2$, si scrivano:
  - l'insieme $S$ delle soluzioni di $A_{-2}X = 0$;
    **Risposta** $\{(\beta, \alpha, 0, 2\beta - \alpha) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2A)**
  - una base e la dimensione di $S$.
    **Risposta** $\dim S = 2$, $\mathcal{B}_S = ((0,1,0,-1),(1,0,0,2))$ **(pt.2A)**

**ESERCIZIO 2.** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si considerino il vettore $\mathbf{v}_k = (-2-2k, k+1, k+1, k+2)$ e la sequenza $S_k = ((k+2,0,4,0),(k+2,2,k+2,0),(k+3,2,2k+4,0))$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathbf{v}_k \in \mathcal{L}(S_k)$;
  **Risposta** $k = -2$ **(pt.2A)**
- $\mathbf{v}_k \in \mathcal{L}(S_k)^{\perp}$.
  **Risposta** $k = -1, 0$ **(pt.2A)**

**ESERCIZIO 3.** In $M_3(\mathbb{R})$ sia $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k-2 & k-2 \\ 0 & k-2 & 2-k \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:

- $A_k$ è ortogonale;
  **Risposta** $k = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ **(pt.3A)**
- il vettore $\mathbf{v} = (0,1,1)$ è un autovettore di $A_k$.
  **Risposta** $k = 2$ **(pt.2A)**

**ESERCIZIO 4.** In $\widetilde{\mathbb{A}}_3(\mathbb{C})$ si considerino le rette $r \ : \ x+y-1 = 0 = 3y+z$ e $s \ : \ 2x-z-1 = 0 = x+y-2$ e il punto $P = (0,1,2)$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana della retta $l$ passante per $P$ e incidente $r$ ed $s$;
  **Risposta** $x+y-1 = 0 = x+3y+z-5$ **(pt.3G)**
- i punti di intersezione tra $l$ ed $r$ e tra $l$ ed $s$.
  **Risposta** $(5,-4,12)$, $[(1,-1,2,0)]$ **(pt.2G)**

**ESERCIZIO 5.** In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k \ : \ 4x^2 + 2(k-2)xy - (k-2)y^2 + 2(k-2)y + 4 = 0$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ammette un solo asse e si scriva un'equazione cartesiana di tale asse;
  **Risposta** $k = -2$, $2x - 2y + 1 = 0$ **(pt.3G)**
- la retta $r: \ 4x+3y-2 = 0$ è la polare del punto $P = (-2,0)$ nella polarità indotta da $\mathcal{C}_k$.
  **Risposta** $k = 8$ **(pt.2G)**

**ESERCIZIO 6.** In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ è data la quadrica $\mathcal{Q} \ : \ 5x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xz + 2y = 0$.

- Si riconosca $\mathcal{Q}$, precisando la natura dei suoi punti semplici.
  **Risposta** Ellissoide, punti semplici ellittici **(pt.2G)**
- Si determinino, se esistono, un piano $\alpha$ tale che $\mathcal{Q} \cap \alpha$ sia una parabola e un piano $\beta$ tale che $\mathcal{Q} \cap \beta$ sia un'ellisse; in caso non esistano si giustifichi la risposta.
  **Risposta** $\nexists \alpha$ poiché le sezioni piane irriducibili di un ellissoide sono tutte ellissi, $\beta \ : \ z = 0$ **(pt.3G)**

# UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## **Algebra e Geometria** - $1^o$ appello - 16/01/2019

| COGNOME | NOME |
|---|---|
| CORSO DI LAUREA | MATRICOLA |

**ESERCIZIO 1.** Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & k+2 \\ 0 & 0 & 0 & k \\ 2 & 2-k & -k & 0 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui l'insieme $S$ delle soluzioni di $A_k X = 0$ ha dimensione maggiore o uguale a 1.
  **Risposta** $\forall k \in \mathbb{R}$ **(pt.2A)**
- Posto $k = 0$, si scrivano:
  - l'insieme $S$ delle soluzioni di $A_0 X = 0$;
    **Risposta** $\{(-\alpha, \alpha, \beta - \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2A)**
  - una base e la dimensione di $S$.
    **Risposta** $\dim S = 2$, $\mathcal{B}_S = ((1, -1, 1, 0), (0, 0, 1, 1))$ **(pt.2A)**

**ESERCIZIO 2.** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si considerino il vettore $\mathbf{v}_k = (6-2k, k-3, k-3, k-2)$ e la sequenza $S_k = ((k-2, 0, 4, 0), (k-2, 2, k-2, 0), (k-1, 2, 2k-4, 0))$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathbf{v}_k \in \mathcal{L}(S_k)$;
  **Risposta** $k = 2$ **(pt.2A)**
- $\mathbf{v}_k \in \mathcal{L}(S_k)^\perp$.
  **Risposta** $k = 3, 4$ **(pt.2A)**

**ESERCIZIO 3.** In $M_3(\mathbb{R})$ sia $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k+3 & k+3 \\ 0 & k+3 & -3-k \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:

- $A_k$ è ortogonale;
  **Risposta** $k = -3 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ **(pt.3A)**
- il vettore $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ è un autovettore di $A_k$.
  **Risposta** $k = -3$ **(pt.2A)**

**ESERCIZIO 4.** In $\widetilde{\mathbb{A}}_3(\mathbb{C})$ si considerino le rette $r \ : \ 3x + y - 1 = 0 = y + z$ e $s \ : \ x - z - 1 = 0 = 3x + y + 2$ e il punto $P = (0, 1, 2)$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana della retta $l$ passante per $P$ e incidente $r$ ed $s$;
  **Risposta** $3x + y - 1 = 0 = 4x + y - z + 1$ **(pt.3G)**
- i punti di intersezione tra $l$ ed $r$ e tra $l$ ed $s$.
  **Risposta** $(3/2, -7/2, 7/2)$, $[(1, -3, 1, 0)]$ **(pt.2G)**

**ESERCIZIO 5.** In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k \ : \ 4x^2 - 2(k-3)xy - (k-3)y^2 - 2(k-3)y + 4 = 0$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ammette un solo asse e si scriva un'equazione cartesiana di tale asse;
  **Risposta** $k = -1$, $2x + 2y + 1 = 0$ **(pt.3G)**
- la retta $r : \ 4x - 3y - 2 = 0$ è la polare del punto $P = (-2, 0)$ nella polarità indotta da $\mathcal{C}_k$.
  **Risposta** $k = 9$ **(pt.2G)**

**ESERCIZIO 6.** In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ è data la quadrica $\mathcal{Q} \ : \ 5x^2 + y^2 + 2z^2 + 4xy + 2z = 0$.

- Si riconosca $\mathcal{Q}$, precisando la natura dei suoi punti semplici.
  **Risposta** Ellissoide, punti semplici ellittici **(pt.2G)**
- Si determinino, se esistono, un piano $\alpha$ tale che $\mathcal{Q} \cap \alpha$ sia un'iperbole e un piano $\beta$ tale che $\mathcal{Q} \cap \beta$ sia un'ellisse; in caso non esistano si giustifichi la risposta.
  **Risposta** $\nexists \alpha$ poiché le sezioni piane irriducibili di un ellissoide sono tutte ellissi, $\beta \ : \ x = 0$ **(pt.3G)**

# UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - $1^o$ appello - 16/01/2019

| COGNOME | NOME |
|---|---|
| CORSO DI LAUREA | MATRICOLA |

**ESERCIZIO 1.** Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 4 & -4k-4 & 0 & 4k \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui l'insieme $S$ delle soluzioni di $A_kX = 0$ ha dimensione maggiore o uguale a 1.

  **Risposta** $\forall k \in \mathbb{R}$ **(pt.2A)**
- Posto $k = -2$, si scrivano:
  - l'insieme $S$ delle soluzioni di $A_{-2}X = 0$;

    **Risposta** $\{(\alpha, 2\beta - \alpha, 0, \beta) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2A)**
  - una base e la dimensione di $S$.

    **Risposta** $\dim S = 2$, $\mathcal{B}_S = ((1, -1, 0, 0), (0, 2, 0, 1))$ **(pt.2A)**

**ESERCIZIO 2.** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si considerino il vettore $\mathbf{v}_k = (-2k, k, k, k+1)$ e la sequenza $S_k = ((k+1, 0, 4, 0), (k+1, 2, k+1, 0), (k+2, 2, 2k+2, 0))$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathbf{v}_k \in \mathcal{L}(S_k)$;

  **Risposta** $k = -1$ **(pt.2A)**
- $\mathbf{v}_k \in \mathcal{L}(S_k)^\perp$.

  **Risposta** $k = 0, 1$ **(pt.2A)**

**ESERCIZIO 3.** In $M_3(\mathbb{R})$ sia $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k+1 & k+1 \\ 0 & k+1 & -1-k \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:

- $A_k$ è ortogonale;

  **Risposta** $k = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ **(pt.3A)**
- il vettore $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ è un autovettore di $A_k$.

  **Risposta** $k = -1$ **(pt.2A)**

**ESERCIZIO 4.** In $\widetilde{\mathbb{A}}_3(\mathbb{C})$ si considerino le rette $r \ : \ x - 2y - 4 = 0 = y + 3z$ e $s \ : \ x + z + 3 = 0 = x - 2y - 5$ e il punto $P = (0, -2, 1)$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana della retta $l$ passante per $P$ e incidente $r$ ed $s$;

  **Risposta** $x - 2y - 4 = 0 = 5x - 8y + z - 17$ **(pt.3G)**
- i punti di intersezione tra $l$ ed $r$ e tra $l$ ed $s$.

  **Risposta** $(2/5, -9/5, 3/5)$, $[(2, 1, -2, 0)]$ **(pt.2G)**

**ESERCIZIO 5.** In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k \ : \ 4x^2 + 2(k+4)xy - (k+4)y^2 + 2(k+4)x + 8 + k = 0$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ammette un solo asse e si scriva un'equazione cartesiana di tale asse;

  **Risposta** $k = -8$, $2x - 2y - 1 = 0$ **(pt.3G)**
- la retta $r : \ 4x + 3y + 1 = 0$ è la polare del punto $P = (-2, -1)$ nella polarità indotta da $\mathcal{C}_k$.

  **Risposta** $k = 2$ **(pt.2G)**

**ESERCIZIO 6.** In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ è data la quadrica $\mathcal{Q} \ : \ 5x^2 + 9y^2 + z^2 + 12xy + 2z = 0$.

- Si riconosca $\mathcal{Q}$, precisando la natura dei suoi punti semplici.

  **Risposta** Ellissoide, punti semplici ellittici **(pt.2G)**
- Si determinino, se esistono, un piano $\alpha$ tale che $\mathcal{Q} \cap \alpha$ sia una parabola e un piano $\beta$ tale che $\mathcal{Q} \cap \beta$ sia un'ellisse; in caso non esistano si giustifichi la risposta.

  **Risposta** $\nexists \alpha$ poiché le sezioni piane irriducibili di un ellissoide sono tutte ellissi, $\beta \ : \ x = 0$ **(pt.3G)**

# UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - $1^o$ appello - 16/01/2019

| COGNOME | NOME |
|---|---|
| CORSO DI LAUREA | MATRICOLA |

**ESERCIZIO 1.** Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 1 & k+2 & -1 & -2 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2-k & -k \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui l'insieme $S$ delle soluzioni di $A_kX = 0$ ha dimensione maggiore o uguale a 1.
  **Risposta** $\forall k \in \mathbb{R}$ **(pt.2A)**
- Posto $k = 0$, si scrivano:
  - l'insieme $S$ delle soluzioni di $A_0X = 0$;
    **Risposta** $\{(-\alpha, \beta, \alpha, \beta - \alpha) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2A)**
  - una base e la dimensione di $S$.
    **Risposta** $\dim S = 2$, $\mathcal{B}_S = ((1, 0, -1, 1), (0, 1, 0, 1))$ **(pt.2A)**

**ESERCIZIO 2.** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si considerino il vettore $\mathbf{v}_k = (4-2k, k-2, k-2, k-1)$ e la sequenza $S_k = ((k-1, 0, 4, 0), (k-1, 2, k-1, 0), (k, 2, 2k-2, 0))$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathbf{v}_k \in \mathcal{L}(S_k)$;
  **Risposta** $k = 1$ **(pt.2A)**
- $\mathbf{v}_k \in \mathcal{L}(S_k)^\perp$.
  **Risposta** $k = 2, 3$ **(pt.2A)**

**ESERCIZIO 3.** In $M_3(\mathbb{R})$ sia $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k+2 & k+2 \\ 0 & k+2 & -2-k \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:

- $A_k$ è ortogonale;
  **Risposta** $k = -2 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ **(pt.3A)**
- il vettore $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ è un autovettore di $A_k$.
  **Risposta** $k = -2$ **(pt.2A)**

**ESERCIZIO 4.** In $\widetilde{\mathbb{A}}_3(\mathbb{C})$ si considerino le rette $r \ : \ x + z - 1 = 0 = 3x + y$ e $s \ : \ y - 2z + 1 = 0 = x + z - 2$ e il punto $P = (1, 2, 0)$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana della retta $l$ passante per $P$ e incidente $r$ ed $s$;
  **Risposta** $x + z - 1 = 0 = 3x + y + z - 5$ **(pt.3G)**
- i punti di intersezione tra $l$ ed $r$ e tra $l$ ed $s$.
  **Risposta** $(-4, 12, 5)$, $[(-1, 2, 1, 0)]$ **(pt.2G)**

**ESERCIZIO 5.** In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k \ : \ 4x^2 + 2(k+1)xy - (k+1)y^2 + 2(k+1)y + 4 = 0$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ammette un solo asse e si scriva un'equazione cartesiana di tale asse;
  **Risposta** $k = -5$, $2x - 2y + 1 = 0$ **(pt.3G)**
- la retta $r : \ 4x + 3y - 2 = 0$ è la polare del punto $P = (-2, 0)$ nella polarità indotta da $\mathcal{C}_k$.
  **Risposta** $k = 5$ **(pt.2G)**

**ESERCIZIO 6.** In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ è data la quadrica $\mathcal{Q} \ : \ x^2 + 9y^2 + 5z^2 + 12yz + 2x = 0$.

- Si riconosca $\mathcal{Q}$, precisando la natura dei suoi punti semplici.
  **Risposta** Ellissoide, punti semplici ellittici **(pt.2G)**
- Si determinino, se esistono, un piano $\alpha$ tale che $\mathcal{Q} \cap \alpha$ sia un'iperbole e un piano $\beta$ tale che $\mathcal{Q} \cap \beta$ sia un'ellisse; in caso non esistano si giustifichi la risposta.
  **Risposta** $\nexists \alpha$ poiché le sezioni piane irriducibili di un ellissoide sono tutte ellissi, $\beta \ : \ z = 0$ **(pt.3G)**

# UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - $1^o$ appello - 16/01/2019

| COGNOME | NOME |
|---|---|
| CORSO DI LAUREA | MATRICOLA |

**ESERCIZIO 1.** Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & k \\ 4 & 4k & -4k-4 & 0 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui l'insieme $S$ delle soluzioni di $A_kX = 0$ ha dimensione maggiore o uguale a 1.

  **Risposta** $\forall k \in \mathbb{R}$ **(pt.2A)**
- Posto $k = -2$, si scrivano:
  - l'insieme $S$ delle soluzioni di $A_{-2}X = 0$;

    **Risposta** $\{(\alpha, \beta, 2\beta - \alpha, 0) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2A)**
  - una base e la dimensione di $S$.

    **Risposta** $\dim S = 2$, $\mathcal{B}_S = ((1, 0, -1, 0), (0, 1, 2, 0))$ **(pt.2A)**

**ESERCIZIO 2.** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si considerino il vettore $\mathbf{v}_k = (10 - 2k, k - 5, k - 5, k - 4)$ e la sequenza $S_k = ((k - 4, 0, 4, 0), (k - 4, 2, k - 4, 0), (k - 3, 2, 2k - 8, 0))$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathbf{v}_k \in \mathcal{L}(S_k)$;

  **Risposta** $k = 4$ **(pt.2A)**
- $\mathbf{v}_k \in \mathcal{L}(S_k)^{\perp}$.

  **Risposta** $k = 5, 6$ **(pt.2A)**

**ESERCIZIO 3.** In $M_3(\mathbb{R})$ sia $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k-3 & k-3 \\ 0 & k-3 & 3-k \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:

- $A_k$ è ortogonale;

  **Risposta** $k = 3 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ **(pt.3A)**
- il vettore $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ è un autovettore di $A_k$.

  **Risposta** $k = 3$ **(pt.2A)**

**ESERCIZIO 4.** In $\widetilde{\mathbb{A}}_3(\mathbb{C})$ si considerino le rette $r \ : \ x + 3z - 1 = 0 = x + y$ e $s \ : \ y - z + 1 = 0 = x + 3z + 2$ e il punto $P = (1, 2, 0)$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana della retta $l$ passante per $P$ e incidente $r$ ed $s$;

  **Risposta** $x + 3z - 1 = 0 = x - y + 4z + 1$ **(pt.3G)**
- i punti di intersezione tra $l$ ed $r$ e tra $l$ ed $s$.

  **Risposta** $(-7/2, 7/2, 3/2)$, $[(-3, 1, 1, 0)]$ **(pt.2G)**

**ESERCIZIO 5.** In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k \ : \ 4x^2 - 2(k-1)xy - (k-1)y^2 - 2(k-1)y + 4 = 0$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ammette un solo asse e si scriva un'equazione cartesiana di tale asse;

  **Risposta** $k = -3$, $2x + 2y + 1 = 0$ **(pt.3G)**
- la retta $r : \ 4x - 3y - 2 = 0$ è la polare del punto $P = (-2, 0)$ nella polarità indotta da $\mathcal{C}_k$.

  **Risposta** $k = 7$ **(pt.2G)**

**ESERCIZIO 6.** In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ è data la quadrica $\mathcal{Q} \ : \ 9x^2 + 5y^2 + z^2 + 12xy + 2z = 0$.

- Si riconosca $\mathcal{Q}$, precisando la natura dei suoi punti semplici.

  **Risposta** Ellissoide, punti semplici ellittici **(pt.2G)**
- Si determinino, se esistono, un piano $\alpha$ tale che $\mathcal{Q} \cap \alpha$ sia una parabola e un piano $\beta$ tale che $\mathcal{Q} \cap \beta$ sia un'ellisse; in caso non esistano si giustifichi la risposta.

  **Risposta** $\nexists \alpha$ poiché le sezioni piane irriducibili di un ellissoide sono tutte ellissi, $\beta \ : \ y = 0$ **(pt.3G)**

# UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

## Algebra e Geometria - $1^o$ appello - 16/01/2019

| COGNOME | NOME |
|---|---|
| CORSO DI LAUREA | MATRICOLA |

**ESERCIZIO 1.** Si considerino le matrici $A_k = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 4k & 0 & -4k-4 & 4 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$, con $k \in \mathbb{R}$.

- Si determinino, se esistono, i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui l'insieme $S$ delle soluzioni di $A_kX = 0$ ha dimensione maggiore o uguale a 1.
  **Risposta** $\forall k \in \mathbb{R}$ **(pt.2A)**
- Posto $k = -2$, si scrivano:
  - l'insieme $S$ delle soluzioni di $A_{-2}X = 0$;
    **Risposta** $\{(\beta, 0, 2\beta - \alpha, \alpha) \in \mathbb{R}^4 \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ **(pt.2A)**
  - una base e la dimensione di $S$.
    **Risposta** $\dim S = 2$, $\mathcal{B}_S = ((0, 0, -1, 1), (1, 0, 2, 0))$ **(pt.2A)**

**ESERCIZIO 2.** Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ con prodotto scalare euclideo si considerino il vettore $\mathbf{v}_k = (-6-2k, k+3, k+3, k+4)$ e la sequenza $S_k = ((k+4, 0, 4, 0), (k+4, 2, k+4, 0), (k+5, 2, 2k+8, 0))$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathbf{v}_k \in \mathcal{L}(S_k)$;
  **Risposta** $k = -4$ **(pt.2A)**
- $\mathbf{v}_k \in \mathcal{L}(S_k)^\perp$.
  **Risposta** $k = -3, -2$ **(pt.2A)**

**ESERCIZIO 3.** In $M_3(\mathbb{R})$ sia $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & k \\ 0 & k & -k \end{pmatrix}$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per cui:

- $A_k$ è ortogonale;
  **Risposta** $k = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ **(pt.3A)**
- il vettore $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ è un autovettore di $A_k$.
  **Risposta** $k = 0$ **(pt.2A)**

**ESERCIZIO 4.** In $\widetilde{\mathbb{A}}_3(\mathbb{C})$ si considerino le rette $r \ : \ 2x - z + 4 = 0 = x + 3y$ e $s \ : \ y + z + 3 = 0 = 2x - z + 5$ e il punto $P = (-2, 1, 0)$. Si determinino:

- un'equazione cartesiana della retta $l$ passante per $P$ e incidente $r$ ed $s$;
  **Risposta** $2x - z + 4 = 0 = 8x - y - 5z + 17$ **(pt.3G)**
- i punti di intersezione tra $l$ ed $r$ e tra $l$ ed $s$.
  **Risposta** $(-9/5, 3/5, 2/5)$, $[(1, -2, 2, 0)]$ **(pt.2G)**

**ESERCIZIO 5.** In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $\mathcal{C}_k \ : \ 4x^2 + 2(k+6)xy - (k+6)y^2 + 2(k+6)x + 10 + k = 0$ con $k \in \mathbb{R}$. Si determinino i valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali:

- $\mathcal{C}_k$ ammette un solo asse e si scriva un'equazione cartesiana di tale asse;
  **Risposta** $k = -10$, $2x - 2y - 1 = 0$ **(pt.3G)**
- la retta $r: \ 4x + 3y + 1 = 0$ è la polare del punto $P = (-2, -1)$ nella polarità indotta da $\mathcal{C}_k$.
  **Risposta** $k = 0$ **(pt.2G)**

**ESERCIZIO 6.** In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ è data la quadrica $\mathcal{Q} \ : \ 5x^2 + y^2 + 9z^2 + 12xz + 2y = 0$.

- Si riconosca $\mathcal{Q}$, precisando la natura dei suoi punti semplici.
  **Risposta** Ellissoide, punti semplici ellittici **(pt.2G)**
- Si determinino, se esistono, un piano $\alpha$ tale che $\mathcal{Q} \cap \alpha$ sia un'iperbole e un piano $\beta$ tale che $\mathcal{Q} \cap \beta$ sia un'ellisse; in caso non esistano si giustifichi la risposta.
  **Risposta** $\nexists \alpha$ poiché le sezioni piane irriducibili di un ellissoide sono tutte ellissi, $\beta \ : \ x = 0$ **(pt.3G)**