

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria

5° appello - 28.08.2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema lineare
$$\begin{cases} -kx + 2y + (k+2)z = 2 - k \\ x = k + 1 \\ kx + (k+1)y + z = 1 \end{cases}.$$

Se ne discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

Risposta $k = -3$ incompatibile, $k = 0$ ∞^1 soluzioni, $k \neq 0, -3$ soluzione unica _____ (pt.4)

Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$, si dica qual è la mutua posizione del piano rappresentato dalla prima equazione del sistema e della retta rappresentata dal sistema costituito dalla seconda e terza equazione, al variare del parametro reale k .

Risposta $k = -3$ paralleli e disgiunti, $k = 0$ retta contenuta nel piano, $k = 0, -3$ incidenti _____ (pt.3)

ESERCIZIO 2. Dato $A = \{(a, b+1, b, 2) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, si determinino:

- una base B di $\mathcal{L}(A)$ e la base B' ottenuta ortogonalizzando B ;

Risposta $B = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 2))$, $B' = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1/2, -1/2, 2))$ _____ (pt.2)

- le componenti di $v = (13, 11, 5, 12)$ in B' .

Risposta $(13, 8, 6)$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si dica se la matrice A è diagonalizzabile, in caso affermativo si trovi una matrice diagonale D simile ad A .

Risposta La matrice A è diagonalizzabile, $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ _____ (pt.3)

Si trovi una matrice ortogonale Q tale che $Q^{-1}AQ = D$.

Risposta $Q = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$ _____ (pt.3)

Indicata con \mathcal{C} la conica di $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$ rappresentata dalla matrice A , si riconosca \mathcal{C} e se ne determinino, quando esistono e sono reali, centro, assi e asintoti.

Risposta iperbole equilatera, $C = (2/3, 0)$, assi: $x = 2/3$, $y = 0$, asintoti: $3x + 3y - 2 = 0$, $3x - 3y - 2 = 0$ (pt.5)

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono dati il piano $\pi : x + y - z + 1 = 0$ e il punto $P = (2, 2, -1)$. Si determinino:

- la proiezione ortogonale H del punto P sul piano π ;

Risposta $H = (0, 0, 1)$ _____ (pt.1)

- un'equazione della sfera tangente in H al piano π e passante per P .

Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 1 = 0$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si considerino la quadrica $\mathcal{Q} : 2x^2 + 9y^2 - z^2 + 2xy + 2xz - 2x + 2z - 1 = 0$ ed i piani $\alpha : x = 0$ e $\beta : z = 0$.

Si riconosca la quadrica \mathcal{Q} .

Risposta \mathcal{Q} è un cono dotato di falda reale con vertice $V = (0, 0, 1)$ _____ (pt.2)

Si riconoscano le due coniche $\mathcal{C}_1 = \mathcal{Q} \cap \alpha$ e $\mathcal{C}_2 = \mathcal{Q} \cap \beta$ dando una spiegazione geometrica di quanto si ottiene.

Risposta \mathcal{C}_1 è riducibile (coppia di rette reali e distinte) poiché $V \in \alpha$, \mathcal{C}_2 è un'ellisse _____ (pt.2)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria

5° appello - 28.08.2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema lineare
$$\begin{cases} (k-1)x + (k+1)y + 4z = -2 \\ 2x = 7+k \\ -x + y + (k+4)z = k+3 \end{cases}.$$

Se ne discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

Risposta $k = 0$ incompatibile, $k = -5$ ∞^1 soluzioni, $k \neq 0, -5$ soluzione unica _____ (pt.4)

Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$, si dica qual è la mutua posizione del piano rappresentato dalla prima equazione del sistema e della retta rappresentata dal sistema costituito dalla seconda e terza equazione, al variare del parametro reale k .

Risposta $k = 0$ paralleli e disgiunti, $k = -5$ retta contenuta nel piano, $k \neq 0, -5$ incidenti _____ (pt.3)

ESERCIZIO 2. Dato $A = \{(3, a, a+b, 2b) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, si determinino:

- una base B di $\mathcal{L}(A)$ e la base B' ottenuta ortogonalizzando B ;

Risposta $B = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 2))$, $B' = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, -1/2, 1/2, 2))$ _____ (pt.2)

- le componenti di $v = (-6, -1, 3, 8)$ in B' .

Risposta $(-6, 1, 4)$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si dica se la matrice A è diagonalizzabile, in caso affermativo si trovi una matrice diagonale D simile ad A .

Risposta La matrice A è diagonalizzabile, $D = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ _____ (pt.3)

Si trovi una matrice ortogonale Q tale che $Q^{-1}AQ = D$.

Risposta $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} & 0 \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} & 0 \end{pmatrix}$ _____ (pt.3)

Indicata con \mathcal{C} la conica di $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$ rappresentata dalla matrice A , si riconosca \mathcal{C} e se ne determinino, quando esistono e sono reali, centro, assi e asintoti.

Risposta iperbole equilatera, $C = (0, 3/8)$, assi: $x = 0$, $y = 3/8$, asintoti: $8x + 8y - 3 = 0$, $8x - 8y + 3 = 0$ (pt.5)

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono dati il piano $\pi : y + 2z + 2 = 0$ e il punto $P = (1, 2, 3)$. Si determinino:

- la proiezione ortogonale H del punto P sul piano π ;

Risposta $H = (1, 0, -1)$ _____ (pt.1)

- un'equazione della sfera tangente in H al piano π e passante per P .

Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 2 = 0$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si considerino la quadrica $\mathcal{Q} : 3x^2 + 2y^2 - 4z^2 - 2xy + 2x - 4y + 2 = 0$ ed i piani $\alpha : x = 0$ e $\beta : y = 0$.

Si riconosca la quadrica \mathcal{Q} .

Risposta \mathcal{Q} è un cono dotato di falda reale con vertice $V = (0, 1, 0)$ _____ (pt.2)

Si riconoscano le due coniche $\mathcal{C}_1 = \mathcal{Q} \cap \alpha$ e $\mathcal{C}_2 = \mathcal{Q} \cap \beta$ dando una spiegazione geometrica di quanto si ottiene.

Risposta \mathcal{C}_1 è riducibile (coppia di rette reali e distinte) poiché $V \in \alpha$, \mathcal{C}_2 è un'iperbole _____ (pt.2)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria

5° appello - 28.08.2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema lineare
$$\begin{cases} kx - ky + 2z = 0 \\ x - 2y + (k+1)z = -k \\ 3y = k + 2 \end{cases}$$

Se ne discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

Risposta $k = -2$ incompatibile, $k = 1$ ∞^1 soluzioni, $k \neq 1, -2$ soluzione unica _____ (pt.4)

Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$, si dica qual è la mutua posizione del piano rappresentato dalla prima equazione del sistema e della retta rappresentata dal sistema costituito dalla seconda e terza equazione, al variare del parametro reale k .

Risposta $k = -2$ paralleli e disgiunti, $k = 1$ retta contenuta nel piano, $k \neq 1, -2$ incidenti _____ (pt.3)

ESERCIZIO 2. Dato $A = \{(a - 2b, a + 2b, 3, b - 1) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, si determinino:

- una base B di $\mathcal{L}(A)$ e la base B' ottenuta ortogonalizzando B ;

Risposta $B = ((1, 1, 0, 0), (-2, 2, 0, 1), (0, 0, 3, -1))$, $B' = ((1, 1, 0, 0), (-2, 2, 0, 1), (-2/9, 2/9, 3, -8/9))$ _____ (pt.2)

- le componenti di $v = (5, 1, 0, -1)$ in B' .

Risposta $(3, -1, 0)$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si dica se la matrice A è diagonalizzabile, in caso affermativo si trovi una matrice diagonale D simile ad A .

Risposta La matrice A è diagonalizzabile, $D = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ _____ (pt.3)

Si trovi una matrice ortogonale Q tale che $Q^{-1}AQ = D$.

Risposta $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ _____ (pt.3)

Indicata con \mathcal{C} la conica di $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$ rappresentata dalla matrice A , si riconosca \mathcal{C} e se ne determinino, quando esistono e sono reali, centro, assi e asintoti.

Risposta iperbole equilatera, $C = (-2/3, 0)$, assi: $x = -2/3, y = 0$, asintoti: $3x - 3y + 2 = 0, 3x + 3y + 2 = 0$ _____ (pt.5)

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono dati il piano $\pi : x + y + z - 4 = 0$ e il punto $P = (-2, 1, -1)$. Si determinino:

- la proiezione ortogonale H del punto P sul piano π ;

Risposta $H = (0, 3, 1)$ _____ (pt.1)

- un'equazione della sfera tangente in H al piano π e passante per P .

Risposta $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2 = 0$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si considerino la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 + 6y^2 + 3z^2 + 4xz + 2x + 4z + 1 = 0$ ed i piani $\alpha : x = 0$ e $\beta : z = 0$.

Si riconosca la quadrica \mathcal{Q} .

Risposta \mathcal{Q} è un cono dotato di falda reale con vertice $V = (-1, 0, 0)$ _____ (pt.2)

Si riconoscano le due coniche $\mathcal{C}_1 = \mathcal{Q} \cap \alpha$ e $\mathcal{C}_2 = \mathcal{Q} \cap \beta$ dando una spiegazione geometrica di quanto si ottiene.

Risposta \mathcal{C}_1 è un'ellisse, \mathcal{C}_2 è riducibile (coppia di rette immaginarie e coniugate) poiché $V \in \beta$ _____ (pt.2)

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria

5° appello - 28.08.2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema lineare
$$\begin{cases} (k+2)x + ky + (k+1)z = 1 \\ 3x + (k-2)y = 3 \\ z = -k \end{cases}.$$

Se ne discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità precisando il numero di soluzioni qualora il sistema sia compatibile.

Risposta $k = 4$ incompatibile, $k = -1$ ∞^1 soluzioni, $k \neq -1, 4$ soluzione unica _____ (pt.4)

Interpretando x, y, z come coordinate in $E_3(\mathbb{R})$, si dica qual è la mutua posizione del piano rappresentato dalla prima equazione del sistema e della retta rappresentata dal sistema costituito dalla seconda e terza equazione, al variare del parametro reale k .

Risposta $k = 4$ paralleli e disgiunti, $k = -1$ retta contenuta nel piano, $k \neq -1, 4$ incidenti _____ (pt.3)

ESERCIZIO 2. Dato $A = \{(a, b-2, 5a, b) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, si determinino:

- una base B di $\mathcal{L}(A)$ e la base B' ottenuta ortogonalizzando B ;

Risposta $B = ((1, 0, 5, 0), (0, 1, 0, 1), (0, -2, 0, 0))$, $B' = ((1, 0, 5, 0), (0, 1, 0, 1), (0, -1, 0, 1))$ _____ (pt.2)

- le componenti di $v = (3, 6, 15, -2)$ in B' .

Risposta $(3, 2, -4)$ _____ (pt.2)

ESERCIZIO 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 3 \\ 0 & -8 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si dica se la matrice A è diagonalizzabile, in caso affermativo si trovi una matrice diagonale D simile ad A .

Risposta La matrice A è diagonalizzabile, $D = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ _____ (pt.3)

Si trovi una matrice ortogonale Q tale che $Q^{-1}AQ = D$.

Risposta $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$ _____ (pt.3)

Indicata con \mathcal{C} la conica di $\tilde{E}_2(\mathbb{R})$ rappresentata dalla matrice A , si riconosca \mathcal{C} e se ne determinino, quando esistono e sono reali, centro, assi e asintoti.

Risposta iperbole equilatera, $C = (-3/8, 0)$, assi: $x = -3/8$, $y = 0$, asintoti: $8x - 8y + 3 = 0$, $8x + 8y + 3 = 0$ _____ (pt.5)

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ sono dati il piano $\pi : 3x - y - z + 9 = 0$ e il punto $P = (4, 0, -1)$. Si determinino:

- la proiezione ortogonale H del punto P sul piano π ;

Risposta $H = (-2, 2, 1)$ _____ (pt.1)

- un'equazione della sfera tangente in H al piano π e passante per P .

Risposta $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 9 = 0$ _____ (pt.3)

ESERCIZIO 5. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si considerino la quadrica $\mathcal{Q} : 3x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2xy + 2xz - 2x - 4y + 2 = 0$ ed i piani $\alpha : x = 0$ e $\beta : y = 0$.

Si riconosca la quadrica \mathcal{Q} .

Risposta \mathcal{Q} è un cono dotato di falda reale con vertice $V = (0, 1, 0)$ _____ (pt.2)

Si riconoscano le due coniche $\mathcal{C}_1 = \mathcal{Q} \cap \alpha$ e $\mathcal{C}_2 = \mathcal{Q} \cap \beta$ dando una spiegazione geometrica di quanto si ottiene.

Risposta \mathcal{C}_1 è riducibile (coppia di rette reali e distinte) poiché $V \in \alpha$, \mathcal{C}_2 è un'iperbole _____ (pt.2)