1

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 5^o appello - 1/9/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y + kz + (k-1)t = 0 \\ x + (k+1)y - t = k \end{cases}$$

Se ne discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità, precisando il numero di soluzioni quando risulta compatibile.

Risposta Il sistema è compatibile per ogni k. Per $k \neq 0$ il sistema ammette ∞^2 soluzioni. Per $k = 0$ il sistema ammette ∞^3 soluzioni ______ **(pt.3)**

Posto $k = 0$ si stabilisca la dimensione e una base dello spazio delle soluzioni.

Risposta $\dim S_0 = 3$, $B = ((0,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,0,1))$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ si stabilisca se il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un autovettore di A; in caso affermativo, si determini il relativo autovalore e l'autospazio al quale appartiene.

Risposta Sì, autovalore 5, autospazio $V_5 = \{(0,y,0,0) \in \mathbb{R}^4 \mid y \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $A_3(\mathbb{R})$ si determini una base dello spazio di traslazione dei piani paralleli contenenti le rette:
$r : \begin{cases} x + 2 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ ed $s : \begin{cases} 3x - y + z + 2 = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \end{cases}$.

Risposta $B = ((3,4,0),(0,0,1))$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si determini per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la conica $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + xy + \alpha x + \beta y + 1 = 0$ ha:

- centro nel punto $C = (1,1)$;

  Risposta $\alpha = \beta = -3$ ______ **(pt.3)**

- il punto $P = (1,1)$ e la retta $p : x + y + \frac{2}{3} = 0$ come coppia polo-polare.

  Risposta $\alpha = \beta = 0$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ sia α il piano di equazione $ix + y - (2i+3)z = i$. Determinare un'equazione cartesiana e reale della retta reale di α.

Risposta $\begin{cases} y - 3z = 0 \\ x - 2z - 1 = 0 \end{cases}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q} :\ (y-1)^2 + (z-1)^2 - x = 0$ stabilendo la natura dei suoi punti semplici.

Risposta $\mathcal{Q}$ è un paraboloide ellittico ______ **(pt.3)**

Determinare, se esistono, un piano α e un piano β tali che $\alpha \cap \mathcal{Q}$ sia una parabola e $\beta \cap \mathcal{Q}$ sia un'iperbole.

Risposta α passa per $P_\infty = [(1,0,0,0)]$, ad esempio $y = 0$; β non esiste. ______ **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 5^o appello - 1/9/2015

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} kx + z + (3-k)t = k-2 \\ 2x + (2-k)y + z + t = 0 \end{cases}$$

Se ne discuta, al variare di $k \in \mathbb{R}$, la compatibilità, precisando il numero di soluzioni quando risulta compatibile.

Risposta Il sistema è compatibile per ogni k. Per $k \neq 2$ il sistema ammette ∞^2 soluzioni. Per $k = 2$ il sistema ammette ∞^3 soluzioni **(pt.3)**

Posto $k = 2$ si stabilisca la dimensione e una base dello spazio delle soluzioni.

Risposta $\dim S_2 = 3$, $B = ((0,1,0,0),(1,0,0,-2),(0,0,1,-1))$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 2. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ si stabilisca se il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ è un autovettore di A; in caso affermativo, si determini il relativo autovalore e l'autospazio al quale appartiene.

Risposta Sì, autovalore 4, autospazio $V_4 = \{(0,0,z,0) \in \mathbb{R}^4 \mid z \in \mathbb{R}\}$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 3. In $A_3(\mathbb{R})$ si determini una base dello spazio di traslazione dei piani paralleli contenenti le rette:
$r: \begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ z + 3 = 0 \end{cases}$ ed $s: \begin{cases} 3x + 6y + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Risposta $B = ((-2,1,0),(0,0,1))$ **(pt.4)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ si determini per quali valori dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la conica $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + \alpha xy + x + \beta y + 1 = 0$ ha:

- centro nel punto $C = (1,1)$;

  Risposta $\alpha = -3, \beta = 1$ **(pt.3)**

- il punto $P = (1,1)$ e la retta $p : 3x + 2y + 3 = 0$ come coppia polo-polare.

  Risposta $\alpha = \beta = 0$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{A}_3(\mathbb{C})$ sia α il piano di equazione $2x - (3i+1)y + iz = i$. Determinare un'equazione cartesiana e reale della retta reale di α.

Risposta $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ **(pt.3)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconosca la quadrica $\mathcal{Q}:\ (x-y)^2 - 2z^2 + 2x + 2y - 1 = 0$ stabilendo la natura dei suoi punti semplici.

Risposta $\mathcal{Q}$ è un paraboloide iperbolico **(pt.3)**

Determinare, se esistono, un piano α e un piano β tali che $\alpha \cap \mathcal{Q}$ sia un'ellisse e $\beta \cap \mathcal{Q}$ sia una parabola.

Risposta α non esiste; β passa per $P_\infty = [(1,1,0,0)]$, ad esempio $z = 0$. **(pt.4)**