UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 3^o appello - 26.03.2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, con il prodotto scalare euclideo, è dato $A = [(1,1,0),(0,1,1),(1,0,-1)]$. Si determinino:

- $\mathcal{L}(A)$, una sua base B ed una sua base ortonormale B';

  Risposta $\mathcal{L}(A) = \{(a, a+b, b) \in \mathbb{R}^3,\ a, b \in \mathbb{R}\}$,
  $B = ((1,1,0),(0,1,1))$, $B' = ((1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}))$ ________ **(pt.4)**

- Il complemento ortogonale di A.

  Risposta $A^\perp = \{(c, -c, c) \in \mathbb{R}^3, c \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, dove $k \in \mathbb{R}$.

Si determinino:

- i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$;

  Risposta $-1 < k$ ________ **(pt.3)**

- i valori di k per i quali A_k è ortogonalmente diagonalizzabile;

  Risposta $k = 1$ ________ **(pt.1)**

Posto $k = 3$, si determinino una matrice diagonale D, simile ad A_3, e una diagonalizzante P.

Risposta $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, si determinino lo spazio delle soluzioni del sistema : $\begin{cases} kx + kz = 0 \\ x + ky = 0 \end{cases}$ e la sua dimensione.

Risposta $k \neq 0$: $S_k = \mathcal{L}(((-k, 1, k)))$, $\dim S_k = 1$; $\quad k = 0$: $S_0 = \mathcal{L}(((0,1,0),(0,0,1)))$, $\dim S_0 = 2$ ________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ è data la conica generale $\mathcal{C} : 3x^2 - y^2 + 2xy + 2y - 1 = 0$. Si determinino rappresentazioni cartesiane

- del centro e degli asintoti di $\mathcal{C}$;

  Risposta $C = (-1/4, 3/4)$; $\quad t_1 : 6x - 2y + 3 = 0$, $\quad t_2 : 2x + 2y - 1 = 0$ ________ **(pt.2)**

- degli assi di $\mathcal{C}$.

  Risposta $4(2 \pm \sqrt{5})x + 4y = 1 \mp \sqrt{5}$ ________ **(pt.2)**

Si dica, motivando la risposta, se la retta $r : 3x + y = 0$ è un diametro.

Risposta r è la polare di X_∞ dunque, per definizione, è un diametro. ________ **(pt.1)**

ESERCIZIO 5. In $E_3(\mathbb{R})$, date le rette $r : x + y - 1 = 0 = z - 2$ ed $s : 2y - z = 0 = x$, si determini un'equazione cartesiana della superficie descritta da s nella rotazione di asse r.

Risposta $4x^2 + 4y^2 - z^2 - 10xy + 10x - 8y + 4z = 0$ ________ **(pt.4)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 - 2xy + y^2 - x = 0$ e se ne determinino gli eventuali punti doppi. Si scriva una rappresentazione cartesiana della conica impropria di $\mathcal{Q}$ e, nel caso essa sia riducibile, delle sue componenti. Si riconosca la quadrica.

Risposta Z_∞ è l'unico punto doppio; $\mathcal{C}_\infty : (x_1 - x_2)^2 = x_4 = 0$ è una conica riducibile nella retta $r_\infty : x_1 - x_2 = x_4 = 0$ contata due volte. Dunque $\mathcal{Q}$ è un cilindro parabolico con vertice in Z_∞. ________ **(pt.2)**

Si determinino, motivando le risposte, equazioni cartesiane di due piani α e β passanti per $P = (0,0,1)$, che intersechino la quadrica secondo una conica riducibile e una irriducibile, rispettivamente.

Risposta $\alpha : x = 0$ è un piano per P e per Z_∞, dunque la sezione $\mathcal{Q} \cap \alpha$ è riducibile; $\beta : z = 1$ è un piano per P non passante per Z_∞, dunque la sezione $\mathcal{Q} \cap \beta$ è irriducibile. ________ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 3^o appello - 26.03.2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, con il prodotto scalare euclideo, è dato $A = [(2,-1,0),(0,1,1),(2,0,1)]$. Si determinino:

- $\mathcal{L}(A)$, una sua base B ed una sua base ortonormale B';

  Risposta $\mathcal{L}(A) = \{(2a, b-a, b) \in \mathbb{R}^3,\ a,b \in \mathbb{R}\}$,
  $B = ((0,1,1),(2,-1,0))$, $B' = ((0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (4/3\sqrt{2}, -1/3\sqrt{2}, 1/3\sqrt{2}))$ ______ **(pt.4)**

- Il complemento ortogonale di A.

  Risposta $A^\perp = \{(c, 2c, -2c) \in \mathbb{R}^3, c \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & k \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, dove $k \in \mathbb{R}$.

Si determinino:

- i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$;

  Risposta $-2 < k$ ______ **(pt.3)**

- i valori di k per i quali A_k è ortogonalmente diagonalizzabile;

  Risposta $k = 2$ ______ **(pt.1)**

Posto $k = 6$, si determinino una matrice diagonale D, simile ad A_6, e una diagonalizzante P.

Risposta $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, si determinino lo spazio delle soluzioni del sistema : $\begin{cases} ky + kz = 0 \\ kx + y = 0 \end{cases}$ e la sua dimensione.

Risposta $k \neq 0:\ S_k = \mathcal{L}(((1,-k,k)))$, $\dim S_k = 1$; $k = 0:\ S_0 = \mathcal{L}(((1,0,0),(0,0,1)))$, $\dim S_0 = 2$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ è data la conica generale $\mathcal{C} : x^2 + 7y^2 + 8xy + 2x - 1 = 0$. Si determinino rappresentazioni cartesiane

- del centro e degli asintoti di $\mathcal{C}$;

  Risposta $C = (7/9, -4/9)$; $t_1 : 3x + 21y + 7 = 0$, $t_2 : 3x + 3y - 1 = 0$ ______ **(pt.2)**

- degli assi di $\mathcal{C}$.

  Risposta $2x - y = 2$; $9x + 18y + 1 = 0$ ______ **(pt.2)**

Si dica, motivando la risposta, se la retta $r : 4x + 7y = 0$ è un diametro.

Risposta r è la polare di Y_∞ dunque, per definizione, è un diametro. ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 5. In $E_3(\mathbb{R})$, date le rette $r : x + y - 1 = 0 = z - 1$ ed $s : y - z = 0 = x$, si determini un'equazione cartesiana della superficie descritta da s nella rotazione di asse r.

Risposta $x^2 + y^2 - z^2 - 4xy + 4x - 2y + 2z = 0$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 - z^2 + 2x = 0$ e se ne determinino gli eventuali punti doppi. Si scriva una rappresentazione cartesiana della conica impropria di $\mathcal{Q}$ e, nel caso essa sia riducibile, delle sue componenti. Si riconosca la quadrica.

Risposta Y_∞ è l'unico punto doppio; $\mathcal{C}_\infty : (x_1 + x_3)(x_1 - x_3) = x_4 = 0$ è una conica riducibile nell'unione delle rette $r_\infty : x_1 + x_3 = x_4 = 0$ ed $s_\infty : x_1 - x_3 = x_4 = 0$. Dunque $\mathcal{Q}$ è un cilindro iperbolico con vertice in Y_∞. ______ **(pt.2)**

Si determinino, motivando le risposte, equazioni cartesiane di due piani α e β passanti per $P = (0,1,1)$, che intersechino la quadrica secondo una conica riducibile e una irriducibile, rispettivamente.

Risposta $\alpha : x = 0$ è un piano per P e per Y_∞, dunque la sezione $\mathcal{Q} \cap \alpha$ è riducibile; $\beta : y = 1$ è un piano per P non passante per Y_∞, dunque la sezione $\mathcal{Q} \cap \beta$ è irriducibile. ______ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 3^o appello - 26.03.2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, con il prodotto scalare euclideo, è dato $A = [(1,-1,0),(0,1,2),(1,0,2)]$. Si determinino:

- $\mathcal{L}(A)$, una sua base B ed una sua base ortonormale B';

  Risposta $\mathcal{L}(A) = \{(a, b-a, 2b) \in \mathbb{R}^3,\ a,b \in \mathbb{R}\}$,
  $B = ((1,-1,0),(0,1,2))$, $\quad B' = ((1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0),(1/3\sqrt{2}, 1/3\sqrt{2}, 4/3\sqrt{2}))$ ________ **(pt.4)**

- Il complemento ortogonale di A.

  Risposta $A^\perp = \{(2c, 2c, -c) \in \mathbb{R}^3, c \in \mathbb{R}\}$ ________ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & k \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, dove $k \in \mathbb{R}$.

Si determinino:

- i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$;

  Risposta $k < 2$ ________ **(pt.3)**

- i valori di k per i quali A_k è ortogonalmente diagonalizzabile;

  Risposta $k = -2$ ________ **(pt.1)**

Posto $k = 0$, si determinino una matrice diagonale D, simile ad A_0, e una diagonalizzante P.

Risposta $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, si determinino lo spazio delle soluzioni del sistema : $\begin{cases} x + ky = 0 \\ kx + kz = 0 \end{cases}$ e la sua dimensione.

Risposta $k \neq 0:\ S_k = \mathcal{L}(((-k,1,k)))$, $\dim S_k = 1$; $\quad k = 0:\ S_0 = \mathcal{L}(((0,1,0),(0,0,1)))$, $\dim S_0 = 2$ ________ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ è data la conica generale $\mathcal{C} : 7x^2 + y^2 - 8xy + 2y - 1 = 0$. Si determinino rappresentazioni cartesiane

- del centro e degli asintoti di $\mathcal{C}$;

  Risposta $C = (4/9, 7/9)$; $\quad t_1 : 21x - 3y - 7 = 0$, $\quad t_2 : 3x - 3y + 1 = 0$ ________ **(pt.2)**

- degli assi di $\mathcal{C}$.

  Risposta $18x - 9y - 1 = 0$, $\quad x + 2y - 2 = 0$ ________ **(pt.2)**

Si dica, motivando la risposta, se la retta $r : 7x - 4y = 0$ è un diametro.

Risposta r è la polare di X_∞ dunque, per definizione, è un diametro. ________ **(pt.1)**

ESERCIZIO 5. In $E_3(\mathbb{R})$, date le rette $r : x + y = 0 = z - 2$ ed $s : 2y - z + 2 = 0 = x$, si determini un'equazione cartesiana della superficie descritta da s nella rotazione di asse r.

Risposta $4x^2 + 4y^2 - z^2 - 10xy + 4z - 4 = 0$ ________ **(pt.4)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q} : y^2 - z^2 - z = 0$ e se ne determinino gli eventuali punti doppi. Si scriva una rappresentazione cartesiana della conica impropria di $\mathcal{Q}$ e, nel caso essa sia riducibile, delle sue componenti. Si riconosca la quadrica.

Risposta X_∞ è l'unico punto doppio; $\mathcal{C}_\infty : (x_2 + x_3)(x_2 - x_3) = x_4 = 0$ è una conica riducibile nelle rette $r_\infty : x_2 + x_3 = x_4 = 0$ e $s_\infty : x_2 - x_3 = x_4 = 0$. Dunque $\mathcal{Q}$ è un cilindro iperbolico con vertice in X_∞. ________ **(pt.2)**

Si determinino, motivando le risposte, equazioni cartesiane di due piani α e β passanti per $P = (0,1,1)$, che intersechino la quadrica secondo una conica riducibile e una irriducibile, rispettivamente.

Risposta $\alpha : y = 1$ è un piano per P e per X_∞, dunque la sezione $\mathcal{Q} \cap \alpha$ è riducibile; $\beta : x = 0$ è un piano per P non passante per X_∞, dunque la sezione $\mathcal{Q} \cap \beta$ è irriducibile. ________ **(pt.3)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - Algebra ed Elementi di Geometria - 3^o appello - 26.03.2013

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, con il prodotto scalare euclideo, è dato $A = [(0,2,1),(0,1,1),(0,1,0)]$. Si determinino:

- $\mathcal{L}(A)$, una sua base B ed una sua base ortonormale B';

  Risposta $\mathcal{L}(A) = \{(0, a+b, a) \in \mathbb{R}^3,\ a, b \in \mathbb{R}\}$,
  $B = ((0,1,1),(0,1,0))$, $B' = ((0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}),(0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}))$ ______ **(pt.4)**

- Il complemento ortogonale di A.

  Risposta $A^\perp = \{(c,0,0) \in \mathbb{R}^3, c \in \mathbb{R}\}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $M_3(\mathbb{R})$ è data la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, dove $k \in \mathbb{R}$.

Si determinino:

- i valori di k per i quali A_k è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$;

  Risposta $k < 1$ ______ **(pt.3)**

- i valori di k per i quali A_k è ortogonalmente diagonalizzabile;

  Risposta $k = -1$ ______ **(pt.1)**

Posto $k = -8$, si determinino una matrice diagonale D, simile ad A_{-8}, e una diagonalizzante P.

Risposta $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $P = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 3. In $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, al variare di $k \in \mathbb{R}$, si determinino lo spazio delle soluzioni del sistema : $\begin{cases} kx + ky = 0 \\ x + kz = 0 \end{cases}$ e la sua dimensione.

Risposta $k \neq 0:\ S_k = \mathcal{L}(((-k, k, 1)))$, $\dim S_k = 1$; $k = 0:\ S_0 = \mathcal{L}(((0,1,0),(0,0,1)))$, $\dim S_0 = 2$ ______ **(pt.3)**

ESERCIZIO 4. In $\widetilde{E}_2(\mathbb{C})$ è data la conica generale $\mathcal{C} : x^2 + 2xy - 3y^2 + 2x + 1 = 0$. Si determinino rappresentazioni cartesiane

- del centro e degli asintoti di $\mathcal{C}$;

  Risposta $C = (-3/4, -1/4)$; $t_1 : 2x + 6y + 3 = 0$, $t_2 : 2x - 2y + 1 = 0$ ______ **(pt.2)**

- degli assi di $\mathcal{C}$.

  Risposta $4x - 4(2 \pm \sqrt{5})y = -1 \pm \sqrt{5}$ ______ **(pt.2)**

Si dica, motivando la risposta, se la retta $r : x - 3y = 0$ è un diametro.

Risposta r è la polare di Y_∞ dunque, per definizione, è un diametro. ______ **(pt.1)**

ESERCIZIO 5. In $E_3(\mathbb{R})$, date le rette $r : x + y = 0 = z - 2$ ed $s : 2y - z = 0 = x + 1$, si determini un'equazione cartesiana della superficie descritta da s nella rotazione di asse r.

Risposta $4x^2 + 4y^2 - z^2 - 10xy + 18x - 18y + 4z + 14 = 0$ ______ **(pt.4)**

ESERCIZIO 6. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si consideri la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 - 2xz + z^2 - 2x - 2z = 0$ e se ne determinino gli eventuali punti doppi. Si scriva una rappresentazione cartesiana della conica impropria di $\mathcal{Q}$ e, nel caso essa sia riducibile, delle sue componenti. Si riconosca la quadrica.

Risposta Y_∞ è l'unico punto doppio; $\mathcal{C}_\infty : (x_1 - x_3)^2 = x_4 = 0$ è una conica riducibile nella retta $r_\infty : x_1 - x_3 = x_4 = 0$ contata due volte. Dunque $\mathcal{Q}$ è un cilindro parabolico con vertice in Y_∞. ______ **(pt.2)**

Si determinino, motivando le risposte, equazioni cartesiane di due piani α e β passanti per $P = (1,0,1)$, che intersechino la quadrica secondo una conica riducibile e una irriducibile, rispettivamente.

Risposta $\alpha : x = 1$ è un piano per P e per Y_∞, dunque la sezione $\mathcal{Q} \cap \alpha$ è riducibile; $\beta : y = 0$ è un piano per P non passante per Y_∞, dunque la sezione $\mathcal{Q} \cap \beta$ è irriducibile. ______ **(pt.3)**