UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o test - 19/12/2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini, al variare di k in $\mathbb{R}$, la mutua posizione di $r_k : \begin{cases} x = k \\ 4y - kz = k - 2 \end{cases}$ e $\alpha_k : (k-1)x + 2y - z = 0$

Risposta se $k \neq 2$ r_k e α_k sono incidenti in un punto, se $k = 2$ r_k e α_k sono paralleli e disgiunti ______ **(pt.3)**

Posto $k = 2$ si determini:

- la proiezione ortogonale di r_2 su α_2;

  Risposta $\begin{cases} 5x - 2y + z - 10 = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$ ______ **(pt.2)**

- il raggio di una sfera con centro in un punto di r_2 e tangente al piano α_2;

  Risposta $r = 2/\sqrt{6}$ ______ **(pt.2)**

- una rappresentazione cartesiana della circonferenza ottenuta sezionando la sfera Σ di centro $C = (2, 1, -2)$ e tangente al piano α_2 con il piano $\pi : x + y = 0$.

  Risposta $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z + 3 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $C_k : x^2 - y^2 - 2kxy - 2y - 1 = 0$ dove k è un parametro reale. Si determini per quali valori di k:

- C_k è degenere e si individuino le rette componenti;

  Risposta $k = 0$, $r_1 : x + y + 1 = 0$, $r_2 : x - y - 1 = 0$ ______ **(pt.2)**

- C_k è, rispettivamente, un'ellisse, un'iperbole o una parabola.

  Risposta $\forall k \neq 0$ iperbole ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $C : x^2 + 3y^2 - 2x - 3 = 0$ e se ne determinino i punti impropri.

Risposta Ellisse dotata di punti reali, $P_\infty = [(i\sqrt{3}, 1, 0)]$, $Q_\infty = [(-i\sqrt{3}, 1, 0)]$ ______ **(pt.2)**

Si determinino, se esistono e sono reali, centro (proprio o improrio), assi, asintoti e vertici.

Risposta $C(1, 0)$, assi $a_1 : x = 1$, $a_2 : y = 0$, non ha asintoti reali, $V_1 = (-1, 0)$, $V_2 = (3, 0)$, $V_3 = (1, 2\sqrt{3}/3)$, $V_4 = (1, -2\sqrt{3}/3)$ ______ **(pt.5)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana del luogo delle rette che proiettano dal punto $V = (1, 0, 0)$ i punti della curva $\mathcal{C} :\ x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0 = x$.

Risposta $y^2 + z^2 + 2xy - 2y = 0$ ______ **(pt.4)**

Si riconosca la superficie ottenuta e si indichi la natura dei suoi punti semplici, motivando le risposte.

Risposta Poiché V è un punto proprio la superficie ottenuta è un cono (di vertice V e curva direttrice $\mathcal{C}$). Essendo $\mathcal{Q}$ un cono, i suoi punti semplici sono parabolici. ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconoscano la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 + y^2 - z^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ e le sue sezioni con i piani $\alpha : y = 0$ e $\beta : z = 0$. Nel caso in cui la sezione sia riducibile si determini una rappresentazione cartesiana delle rette che la compongono. Si dica, motivando la risposta, se α e/o β sono tangenti alla quadrica $\mathcal{Q}$.

Risposta Iperboloide iperbolico. $\mathcal{C}_\alpha$ è riducibile, rette componenti $r_1 : x - z + 1 = 0 = y$, $r_2 : x + z + 1 = 0 = y$. $\mathcal{C}_\beta$ è un'ellisse.

α è tangente a $\mathcal{Q}$ poiché $\mathcal{C}_\alpha$ è riducibile e $\mathcal{Q}$ è generale. β non è tangente a $\mathcal{Q}$ poiché $\mathcal{C}_\beta$ non è riducibile. ______ **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o test - 19/12/2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini, al variare di k in $\mathbb{R}$, la mutua posizione di $r_k : \begin{cases} z = 4 \\ 2x + ky = 0 \end{cases}$ e $\alpha_k : x - y + kz = 0$

Risposta se $k \neq -2$ r_k e α_k sono incidenti in un punto, se $k = -2$ r_k e α_k sono paralleli e disgiunti ____ **(pt.3)**

Posto $k = -2$ si determini:

- la proiezione ortogonale di r_{-2} su α_{-2};

  Risposta $\begin{cases} x - y + z - 4 = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$ ____ **(pt.2)**

- il raggio di una sfera con centro in un punto di r_{-2} e tangente al piano α_{-2};

  Risposta $r = 8/\sqrt{6}$ ____ **(pt.2)**

- una rappresentazione cartesiana della circonferenza ottenuta sezionando la sfera Σ di centro $C = (1, 2, 1)$ e tangente al piano α_{-2} con il piano $\pi : x - y = 0$.

  Risposta $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x - 8y - 4z + 9 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ ____ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $C_k : 4x^2 - y^2 - 8x + 6 - k = 0$ dove k è un parametro reale. Si determini per quali valori di k:

- C_k è degenere e si individuino le rette componenti;

  Risposta $k = 2$, $r_1 : 2x - y - 2 = 0$, $r_2 : 2x + y - 2 = 0$ ____ **(pt.2)**

- C_k è, rispettivamente, un'ellisse, un'iperbole o una parabola.

  Risposta $\forall k \neq 2$ iperbole ____ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $C : 5x^2 + 9y^2 - 20x - 25 = 0$ e se ne determinino i punti impropri.

Risposta Ellisse dotata di punti reali, $P_\infty = [(3i, \sqrt{5}, 0)]$, $Q_\infty = [(-3i, \sqrt{5}, 0)]$ ____ **(pt.2)**

Si determinino, se esistono e sono reali, centro (proprio o improrio), assi, asintoti e vertici.

Risposta $C(2, 0)$, assi $a_1 : x = 2$, $a_2 : y = 0$, non ha asintoti reali, $V_1 = (-1, 0)$, $V_2 = (5, 0)$, $V_3 = (2, \sqrt{5})$, $V_4 = (2, -\sqrt{5})$ ____ **(pt.5)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana del luogo delle rette che proiettano dal punto $V_\infty = [(1, 2, 0, 0)]$ i punti della curva $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0 = x$.

Risposta $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 4x - 2y = 0$ ____ **(pt.4)**

Si riconosca la superficie ottenuta e si indichi la natura dei suoi punti semplici, motivando le risposte.

Risposta Poiché V_∞ è un punto improprio la superficie ottenuta è un cilindro (di vertice V_∞ e curva direttrice $\mathcal{C}$). Essendo $\mathcal{Q}$ un cilindro, i suoi punti semplici sono parabolici. ____ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconoscano la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 3y + 2z = 0$ e le sue sezioni con i piani $\alpha : y = 0$ e $\beta : z = x + 1$. Nel caso in cui la sezione sia riducibile si determini una rappresentazione cartesiana delle rette che la compongono. Si dica, motivando la risposta, se α e/o β sono tangenti alla quadrica $\mathcal{Q}$.

Risposta Iperboloide iperbolico. $\mathcal{C}_\alpha$ è riducibile, rette componenti $r_1 : x - z = 0 = y$, $r_2 : x + z - 2 = 0 = y$. $\mathcal{C}_\beta$ è una parabola.

α è tangente a $\mathcal{Q}$ poiché $\mathcal{C}_\alpha$ è riducibile e $\mathcal{Q}$ è generale. β non è tangente a $\mathcal{Q}$ poiché $\mathcal{C}_\beta$ non è riducibile. ____ **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o test - 19/12/2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini, al variare di k in $\mathbb{R}$, la mutua posizione di $r_k : \begin{cases} x = k+1 \\ 4y-(k+1)z = k-1 \end{cases}$ e $\alpha_k : kx+2y-z=3$

Risposta se $k \neq 1$ r_k e α_k sono incidenti in un punto, se $k=1$ r_k e α_k sono paralleli e disgiunti **(pt.3)**

Posto $k=1$ si determini:

- la proiezione ortogonale di r_1 su α_1;

  Risposta $\begin{cases} 5x-2y+z-10=0 \\ x+2y-z-3=0 \end{cases}$ **(pt.2)**

- il raggio di una sfera con centro in un punto di r_1 e tangente al piano α_1;

  Risposta $r = 1/\sqrt{6}$ **(pt.2)**

- una rappresentazione cartesiana della circonferenza ottenuta sezionando la sfera Σ di centro $C=(2,1,0)$ e tangente al piano α_1 con il piano $\pi : x+y=3$.

  Risposta $\begin{cases} 6x^2+6y^2+6z^2-24x-12y+29=0 \\ x+y=3 \end{cases}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $C_k : 4x^2-y^2-2y-k-4=0$ dove k è un parametro reale. Si determini per quali valori di k:

- C_k è degenere e si individuino le rette componenti;

  Risposta $k=-3$, $r_1 : 2x+y+1=0$, $r_2 : 2x-y-1=0$ **(pt.2)**

- C_k è, rispettivamente, un'ellisse, un'iperbole o una parabola.

  Risposta $\forall k \neq -3$ iperbole **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $C : 3x^2+y^2+2y-8=0$ e se ne determinino i punti impropri.

Risposta Ellisse dotata di punti reali, $P_\infty = [(i,\sqrt{3},0)]$, $Q_\infty = [(-i,\sqrt{3},0)]$ **(pt.2)**

Si determinino, se esistono e sono reali, centro (proprio o improrio), assi, asintoti e vertici.

Risposta $C(0,-1)$, assi $a_1 : x=0$, $a_2 : y=-1$, non ha asintoti reali, $V_1=(0,2)$, $V_2=(0,-4)$, $V_3=(\sqrt{3},-1)$, $V_4=(-\sqrt{3},-1)$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana del luogo delle rette che proiettano dal punto $V=(3,0,0)$ i punti della curva $\mathcal{C} :\ x^2+y^2+z^2-2y=0=x$.

Risposta $3y^2+3z^2+2xy-6y=0$ **(pt.4)**

Si riconosca la superficie ottenuta e si indichi la natura dei suoi punti semplici, motivando le risposte.

Risposta Poiché V è un punto proprio la superficie ottenuta è un cono (di vertice V e curva direttrice $\mathcal{C}$). Essendo $\mathcal{Q}$ un cono, i suoi punti semplici sono parabolici. **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconoscano la quadrica $\mathcal{Q} : x^2+y^2-z^2-4y+2z-1=0$ e le sue sezioni con i piani $\alpha : y=0$ e $\beta : y=1$. Nel caso in cui la sezione sia riducibile si determini una rappresentazione cartesiana delle rette che la compongono. Si dica, motivando la risposta, se α e/o β sono tangenti alla quadrica $\mathcal{Q}$.

Risposta Iperboloide iperbolico. $\mathcal{C}_\alpha$ è riducibile, rette componenti $r_1 : x-z+1=0=y$, $r_2 : x+z-1=0=y$. $\mathcal{C}_\beta$ è un'iperbole.

α è tangente a $\mathcal{Q}$ poiché $\mathcal{C}_\alpha$ è riducibile e $\mathcal{Q}$ è generale. β non è tangente a $\mathcal{Q}$ poiché $\mathcal{C}_\beta$ non è riducibile. **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o test - 19/12/2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini, al variare di k in $\mathbb{R}$, la mutua posizione di $r_k : \begin{cases} z = 4 \\ 2x + (k+3)y = 0 \end{cases}$ e $\alpha_k : x - y - (k+3)z = -1$

Risposta se $k \neq -5$ r_k e α_k sono incidenti in un punto, se $k = -5$ r_k e α_k sono paralleli e disgiunti **(pt.3)**

Posto $k = -5$ si determini:

- la proiezione ortogonale di r_{-5} su α_{-5};

  Risposta $\begin{cases} x - y - z + 4 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$ **(pt.2)**

- il raggio di una sfera con centro in un punto di r_{-5} e tangente al piano α_{-5};

  Risposta $r = 9/\sqrt{6}$ **(pt.2)**

- una rappresentazione cartesiana della circonferenza ottenuta sezionando la sfera Σ di centro $C = (1,1,1)$ e tangente al piano α_{-5} con il piano $\pi : x - y + z = 0$.

  Risposta $\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x - 4y - 4z + 3 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $C_k : x^2 - y^2 - 2(k+1)xy + 2y - 1 = 0$ dove k è un parametro reale. Si determini per quali valori di k:

- C_k è degenere e si individuino le rette componenti;

  Risposta $k = -1$, $r_1 : x - y + 1 = 0$, $r_2 : x + y - 1 = 0$ **(pt.2)**

- C_k è, rispettivamente, un'ellisse, un'iperbole o una parabola.

  Risposta $\forall k \neq -1$ iperbole **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $C : 16x^2 + 7y^2 - 42y - 49 = 0$ e se ne determinino i punti impropri.

Risposta Ellisse dotata di punti reali, $P_\infty = [(\sqrt{7}i, 4, 0)]$, $Q_\infty = [(-\sqrt{7}i, 4, 0)]$ **(pt.2)**

Si determinino, se esistono e sono reali, centro (proprio o improrio), assi, asintoti e vertici.

Risposta $C(0,3)$, assi $a_1 : x = 0$, $a_2 : y = 3$, non ha asintoti reali, $V_1 = (0,-1)$, $V_2 = (0,7)$, $V_3 = (\sqrt{7}, 3)$, $V_4 = (-\sqrt{7}, 3)$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana del luogo delle rette che proiettano dal punto $V_\infty = [(1,0,2,0)]$ i punti della curva $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0 = x$.

Risposta $4x^2 + y^2 + z^2 - 4xz - 2y = 0$ **(pt.4)**

Si riconosca la superficie ottenuta e si indichi la natura dei suoi punti semplici, motivando le risposte.

Risposta Poiché V_∞ è un punto improprio la superficie ottenuta è un cilindro (di vertice V_∞ e curva direttrice $\mathcal{C}$). Essendo $\mathcal{Q}$ un cilindro, i suoi punti semplici sono parabolici. **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconoscano la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 - y^2 - z^2 - 2y - 4z - 1 = 0$ e le sue sezioni con i piani $\alpha : z = 0$ e $\beta : x = 0$. Nel caso in cui la sezione sia riducibile si determini una rappresentazione cartesiana delle rette che la compongono. Si dica, motivando la risposta, se α e/o β sono tangenti alla quadrica $\mathcal{Q}$.

Risposta Iperboloide iperbolico. $\mathcal{C}_\alpha$ è riducibile, rette componenti $r_1 : x - y - 1 = 0 = z$, $r_2 : x + y + 1 = 0 = z$. $\mathcal{C}_\beta$ è un'ellisse.

α è tangente a $\mathcal{Q}$ poiché $\mathcal{C}_\alpha$ è riducibile e $\mathcal{Q}$ è generale. β non è tangente a $\mathcal{Q}$ poiché $\mathcal{C}_\beta$ non è riducibile. **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o test - 19/12/2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini, al variare di k in $\mathbb{R}$, la mutua posizione di $r_k : \begin{cases} x = k-1 \\ 4y-(k-1)z = k-3 \end{cases}$ e $\alpha_k : (k-2)x + 2y - z = -1$

Risposta se $k \neq 3$ r_k e α_k sono incidenti in un punto, se $k = 3$ r_k e α_k sono paralleli e disgiunti ______ **(pt.3)**

Posto $k = 3$ si determini:

- la proiezione ortogonale di r_3 su α_3;

  Risposta $\begin{cases} 5x-2y+z-10=0 \\ x+2y-z+1=0 \end{cases}$ ______ **(pt.2)**

- il raggio di una sfera con centro in un punto di r_3 e tangente al piano α_3;

  Risposta $r = 3/\sqrt{6}$ ______ **(pt.2)**

- una rappresentazione cartesiana della circonferenza ottenuta sezionando la sfera Σ di centro $C = (0,2,1)$ e tangente al piano α_3 con il piano $\pi : y - z = 0$.

  Risposta $\begin{cases} 3x^2+3y^2+3z^2-12y-6z+7=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $C_k : 4x^2 - y^2 + 8x - k + 7 = 0$ dove k è un parametro reale. Si determini per quali valori di k:

- C_k è degenere e si individuino le rette componenti;

  Risposta $k = 3$, $r_1 : 2x + y + 2 = 0$, $r_2 : 2x - y + 2 = 0$ ______ **(pt.2)**

- C_k è, rispettivamente, un'ellisse, un'iperbole o una parabola.

  Risposta $\forall k \neq 3$ iperbole ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $C : 3x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ e se ne determinino i punti impropri.

Risposta Ellisse dotata di punti reali, $P_\infty = [(1, i\sqrt{3}, 0)]$, $Q_\infty = [(1, -i\sqrt{3}, 0)]$ ______ **(pt.2)**

Si determinino, se esistono e sono reali, centro (proprio o improrio), assi, asintoti e vertici.

Risposta $C(0,1)$, assi $a_1 : x = 0$, $a_2 : y = 1$, non ha asintoti reali, $V_1 = (0,-1)$, $V_2 = (0,3)$, $V_3 = (2\sqrt{3}/3, 1)$, $V_4 = (-2\sqrt{3}/3, 1)$ ______ **(pt.5)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana del luogo delle rette che proiettano dal punto $V = (-1,0,0)$ i punti della curva $\mathcal{C} : x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0 = x$.

Risposta $y^2 + z^2 - 2xy - 2y = 0$ ______ **(pt.4)**

Si riconosca la superficie ottenuta e si indichi la natura dei suoi punti semplici, motivando le risposte.

Risposta Poiché V è un punto proprio la superficie ottenuta è un cono (di vertice V e curva direttrice $\mathcal{C}$). Essendo $\mathcal{Q}$ un cono, i suoi punti semplici sono parabolici. ______ **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconoscano la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 - y^2 - z^2 - 2x + 2y + 3z = 0$ e le sue sezioni con i piani $\alpha : z = 0$ e $\beta : y = x - 1$. Nel caso in cui la sezione sia riducibile si determini una rappresentazione cartesiana delle rette che la compongono. Si dica, motivando la risposta, se α e/o β sono tangenti alla quadrica $\mathcal{Q}$.

Risposta Iperboloide iperbolico. $\mathcal{C}_\alpha$ è riducibile, rette componenti $r_1 : x - y = 0 = z$, $r_2 : x + y - 2 = 0 = z$. $\mathcal{C}_\beta$ è una parabola.

α è tangente a $\mathcal{Q}$ poiché $\mathcal{C}_\alpha$ è riducibile e $\mathcal{Q}$ è generale. β non è tangente a $\mathcal{Q}$ poiché $\mathcal{C}_\beta$ non è riducibile. __ **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o test - 19/12/2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini, al variare di k in $\mathbb{R}$, la mutua posizione di $r_k : \begin{cases} z = 4 \\ 2x + (k-5)y = 0 \end{cases}$ e $\alpha_k : x - y - (k-5)z = 1$

Risposta se $k \neq 3$ r_k e α_k sono incidenti in un punto, se $k = 3$ r_k e α_k sono paralleli e disgiunti **(pt.3)**

Posto $k = 3$ si determini:

- la proiezione ortogonale di r_3 su α_3;

  Risposta $\begin{cases} x - y - z + 4 = 0 \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$ **(pt.2)**

- il raggio di una sfera con centro in un punto di r_3 e tangente al piano α_3;

  Risposta $r = 7/\sqrt{6}$ **(pt.2)**

- una rappresentazione cartesiana della circonferenza ottenuta sezionando la sfera Σ di centro $C = (2, 2, 1)$ e tangente al piano α_3 con il piano $\pi : x - z = 1$.

  Risposta $\begin{cases} 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 - 24x - 24y - 12z + 53 = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $C_k : 4x^2 - y^2 - 16x + 20 - k = 0$ dove k è un parametro reale. Si determini per quali valori di k:

- C_k è degenere e si individuino le rette componenti;

  Risposta $k = 4$, $r_1 : 2x + y - 4 = 0$, $r_2 : 2x - y - 4 = 0$ **(pt.2)**

- C_k è, rispettivamente, un'ellisse, un'iperbole o una parabola.

  Risposta $\forall k \neq 4$ iperbole **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $C : 9x^2 + 5y^2 - 20y - 25 = 0$ e se ne determinino i punti impropri.

Risposta Ellisse dotata di punti reali, $P_\infty = [(\sqrt{5}, 3i, 0)]$, $Q_\infty = [(\sqrt{5}, -3i, 0)]$ **(pt.2)**

Si determinino, se esistono e sono reali, centro (proprio o improrio), assi, asintoti e vertici.

Risposta $C(0, 2)$, assi $a_1 : x = 0$, $a_2 : y = 2$, non ha asintoti reali, $V_1 = (0, -1)$, $V_2 = (0, 5)$, $V_3 = (\sqrt{5}, 2)$, $V_4 = (-\sqrt{5}, 2)$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana del luogo delle rette che proiettano dal punto $V_\infty = [(2, 0, 1, 0)]$ i punti della curva $\mathcal{C} : \; x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0 = x$.

Risposta $x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4xz - 8y = 0$ **(pt.4)**

Si riconosca la superficie ottenuta e si indichi la natura dei suoi punti semplici, motivando le risposte.

Risposta Poiché V_∞ è un punto improprio la superficie ottenuta è un cilindro (di vertice V_∞ e curva direttrice $\mathcal{C}$). Essendo $\mathcal{Q}$ un cilindro, i suoi punti semplici sono parabolici. **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconoscano la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 - y^2 - z^2 - 2x + 4z + 1 = 0$ e le sue sezioni con i piani $\alpha : z = 0$ e $\beta : z = 1$. Nel caso in cui la sezione sia riducibile si determini una rappresentazione cartesiana delle rette che la compongono. Si dica, motivando la risposta, se α e/o β sono tangenti alla quadrica $\mathcal{Q}$.

Risposta Iperboloide iperbolico. $\mathcal{C}_\alpha$ è riducibile, rette componenti $r_1 : x-y-1 = 0 = z$, $r_2 : x+y-1 = 0 = z$. $\mathcal{C}_\beta$ è un'iperbole.

α è tangente a $\mathcal{Q}$ poiché $\mathcal{C}_\alpha$ è riducibile e $\mathcal{Q}$ è generale. β non è tangente a $\mathcal{Q}$ poiché $\mathcal{C}_\beta$ non è riducibile. **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o test - 19/12/2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini, al variare di k in $\mathbb{R}$, la mutua posizione di $r_k : \begin{cases} x = k+2 \\ 4y-(k+2)z = k \end{cases}$ e $\alpha_k : (k+1)x + 2y - z = -2$

Risposta se $k \neq 0$ r_k e α_k sono incidenti in un punto, se $k = 0$ r_k e α_k sono paralleli e disgiunti **(pt.3)**

Posto $k = 0$ si determini:

- la proiezione ortogonale di r_0 su α_0;

  Risposta $\begin{cases} 5x-2y+z-10=0 \\ x+2y-z+2=0 \end{cases}$ **(pt.2)**

- il raggio di una sfera con centro in un punto di r_0 e tangente al piano α_0;

  Risposta $r = 4/\sqrt{6}$ **(pt.2)**

- una rappresentazione cartesiana della circonferenza ottenuta sezionando la sfera Σ di centro $C = (2, 1, -2)$ e tangente al piano α_0 con il piano $\pi : x + y = 0$.

  Risposta $\begin{cases} 3x^2+3y^2+3z^2-12x-6y+12z-5=0 \\ x+y=0 \end{cases}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $C_k : x^2 - y^2 - 2(k+2)xy + 2x + 1 = 0$ dove k è un parametro reale. Si determini per quali valori di k:

- C_k è degenere e si individuino le rette componenti;

  Risposta $k = -2$, $r_1 : x - y + 1 = 0$, $r_2 : x + y + 1 = 0$ **(pt.2)**

- C_k è, rispettivamente, un'ellisse, un'iperbole o una parabola.

  Risposta $\forall k \neq -2$ iperbole **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $C : x^2 + 3y^2 + 2x - 8 = 0$ e se ne determinino i punti impropri.

Risposta Ellisse dotata di punti reali, $P_\infty = [(\sqrt{3}, i, 0)]$, $Q_\infty = [(\sqrt{3}, -i, 0)]$ **(pt.2)**

Si determinino, se esistono e sono reali, centro (proprio o improrio), assi, asintoti e vertici.

Risposta $C(-1, 0)$, assi $a_1 : x = -1$, $a_2 : y = 0$, non ha asintoti reali, $V_1 = (2, 0)$, $V_2 = (-4, 0)$, $V_3 = (-1, \sqrt{3})$, $V_4 = (-1, -\sqrt{3})$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana del luogo delle rette che proiettano dal punto $V = (-3, 0, 0)$ i punti della curva $\mathcal{C} :\ x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0 = x$.

Risposta $3y^2 + 3z^2 - 2xy - 6y = 0$ **(pt.4)**

Si riconosca la superficie ottenuta e si indichi la natura dei suoi punti semplici, motivando le risposte.

Risposta Poiché V è un punto proprio la superficie ottenuta è un cono (di vertice V e curva direttrice $\mathcal{C}$). Essendo $\mathcal{Q}$ un cono, i suoi punti semplici sono parabolici. **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconoscano la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 - y^2 + z^2 + 4x + 2z + 1 = 0$ e le sue sezioni con i piani $\alpha : x = 0$ e $\beta : y = 0$. Nel caso in cui la sezione sia riducibile si determini una rappresentazione cartesiana delle rette che la compongono. Si dica, motivando la risposta, se α e/o β sono tangenti alla quadrica $\mathcal{Q}$.

Risposta Iperboloide iperbolico. $\mathcal{C}_\alpha$ è riducibile, rette componenti $r_1 : y-z-1 = 0 = x$, $r_2 : y+z+1 = 0 = x$. $\mathcal{C}_\beta$ è un'ellisse.

α è tangente a $\mathcal{Q}$ poiché $\mathcal{C}_\alpha$ è riducibile e $\mathcal{Q}$ è generale. β non è tangente a $\mathcal{Q}$ poiché $\mathcal{C}_\beta$ non è riducibile. **(pt.4)**

UNIVERSITÀ DI BRESCIA - FACOLTÀ DI INGEGNERIA

Algebra e Geometria - 2^o test - 19/12/2012

COGNOME	NOME
CORSO DI LAUREA	MATRICOLA

ESERCIZIO 1. In $E_3(\mathbb{R})$ si determini, al variare di k in $\mathbb{R}$, la mutua posizione di $r_k : \begin{cases} z = 4 \\ 2x + (k-7)y = 0 \end{cases}$ e $\alpha_k : x - y - (k-7)z = -2$

Risposta se $k \neq 5$ r_k e α_k sono incidenti in un punto, se $k = 5$ r_k e α_k sono paralleli e disgiunti **(pt.3)**

Posto $k = 5$ si determini:

- la proiezione ortogonale di r_5 su α_5;

  Risposta $\begin{cases} x - y - z + 4 = 0 \\ x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$ **(pt.2)**

- il raggio di una sfera con centro in un punto di r_5 e tangente al piano α_5;

  Risposta $r = 10/\sqrt{6}$ **(pt.2)**

- una rappresentazione cartesiana della circonferenza ottenuta sezionando la sfera Σ di centro $C = (1, 0, 1)$ e tangente al piano α_5 con il piano $\pi : x + y + z = 0$.

  Risposta $\begin{cases} 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 - 12x - 12z - 13 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$ **(pt.2)**

ESERCIZIO 2. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si consideri la conica $C_k : x^2 - y^2 - 2(k-1)xy - 2y - 1 = 0$ dove k è un parametro reale. Si determini per quali valori di k:

- C_k è degenere e si individuino le rette componenti;

  Risposta $k = 1$, $r_1 : x + y + 1 = 0$, $r_2 : x - y - 1 = 0$ **(pt.2)**

- C_k è, rispettivamente, un'ellisse, un'iperbole o una parabola.

  Risposta $\forall k \neq 1$ iperbole **(pt.2)**

ESERCIZIO 3. In $\tilde{E}_2(\mathbb{C})$ si riconosca la conica $C : 7x^2 + 16y^2 - 42x - 49 = 0$ e se ne determinino i punti impropri.

Risposta Ellisse dotata di punti reali, $P_\infty = [(4, \sqrt{7}i, 0)]$, $Q_\infty = [(4, -\sqrt{7}i, 0)]$ **(pt.2)**

Si determinino, se esistono e sono reali, centro (proprio o improrio), assi, asintoti e vertici.

Risposta $C(3, 0)$, assi $a_1 : x = 3$, $a_2 : y = 0$, non ha asintoti reali, $V_1 = (-1, 0)$, $V_2 = (7, 0)$, $V_3 = (3, \sqrt{7})$, $V_4 = (3, -\sqrt{7})$ **(pt.5)**

ESERCIZIO 4. In $\tilde{E}_3(\mathbb{C})$ si determini una rappresentazione cartesiana del luogo delle rette che proiettano dal punto $V_\infty = [(2, 1, 0, 0)]$ i punti della curva $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0 = x$.

Risposta $x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4xy + 4x - 8y = 0$ **(pt.4)**

Si riconosca la superficie ottenuta e si indichi la natura dei suoi punti semplici, motivando le risposte.

Risposta Poiché V_∞ è un punto improprio la superficie ottenuta è un cilindro (di vertice V_∞ e curva direttrice $\mathcal{C}$). Essendo $\mathcal{Q}$ un cilindro, i suoi punti semplici sono parabolici. **(pt.2)**

ESERCIZIO 5. In $\widetilde{E}_3(\mathbb{C})$ si riconoscano la quadrica $\mathcal{Q} : x^2 - y^2 + z^2 - 3x + 2y - 2z = 0$ e le sue sezioni con i piani $\alpha : x = 0$ e $\beta : y = z + 1$. Nel caso in cui la sezione sia riducibile si determini una rappresentazione cartesiana delle rette che la compongono. Si dica, motivando la risposta, se α e/o β sono tangenti alla quadrica $\mathcal{Q}$.

Risposta Iperboloide iperbolico. $\mathcal{C}_\alpha$ è riducibile, rette componenti $r_1 : y - z = 0 = x$, $r_2 : y + z - 2 = 0 = x$. $\mathcal{C}_\beta$ è una parabola.

α è tangente a $\mathcal{Q}$ poiché $\mathcal{C}_\alpha$ è riducibile e $\mathcal{Q}$ è generale. β non è tangente a $\mathcal{Q}$ poiché $\mathcal{C}_\beta$ non è riducibile. **(pt.4)**